

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO

CORSO DI LAUREA IN FISICA

TESI DI LAUREA :

ROTTURA DINAMICA DELLA SIMMETRIA IN TEORIE DI GAUGE

RELATORE : Prof. G. M. Prosperi

G. M. Prosperi

CORRELATORI : Prof. E. Fiorini

E. Fiorini

: Prof. G. Cicuta

G. Cicuta

HERBERT HAMBER

Matr. 125909

ANNO ACCADEMICO 1975-76

TERZA SESSIONE

INDICE

Introduzione	pag.	1
Capitolo I - Rottura dinamica della simmetria in teoria di campo non relativistica. La teoria microscopica (BCS) della superconduttività	pag.	5
Capitolo II - Analogie in teoria di campo relati- vistica	pag.	19
Capitolo III - Un semplice modello abeliano	pag.	29
Capitolo IV - Rottura dinamica della simmetria in teorie di gauge non abeliane	pag.	71
Capitolo V - Metodi variazionali per lo studio de gli aspetti non lineari delle teorie dinamicamente rotte	pag.	116
Considerazioni conclusive	pag.	131
Bibliografia	pag.	135

INTRODUZIONE

Notevole interesse ha suscitato recentemente la possibilità che in una teoria di campo con mesoni vettori a massa zero questi possano acquisire la loro massa tramite una rottura spontanea della simmetria di gauge della Lagrangiana. Un meccanismo di questo tipo ha il pregio di dare luogo ad una teoria con mesoni vettoriali massicci rinormalizzabile in senso usuale, in virtù della simmetria nascosta della Lagrangiana.¹ In effetti teorie di questo genere si presume possano unificare le interazioni deboli ed elettromagnetiche⁴ e forse anche le altre interazioni tra particelle elementari.

Il modo tipico attraverso il quale si giunge ad una situazione di simmetria spontaneamente rotta è rappresentato dall'introduzione, accanto ad una Lagrangiana gauge-invariante che accoppia fermioni e bosoni vettoriali, di uno o più campi scalari scelti opportunamente e accoppiati in maniera invariante ai campi precedenti. Invertendo il segno del termine di massa nella Lagrangiana dei campi scalari si ha che alcuni di essi acquistano un valore di aspettazione di vuoto non nullo, rompendo così l'invarianza del medesimo sotto l'azione di alcuni generatori del gruppo di simmetria. Ridefinendo i campi scalari si può mostrare la presenza di eccitazioni a massa nulla, i bosoni di Goldstone.⁵

La presenza di una simmetria di gauge locale fa sì che in un gauge particolare, il gauge unitario, che esiste sempre, le eccitazioni a massa nulla non appaiano come particelle fisiche ma si combinano con i mesoni vettori per dare luogo ad una componente di polarizzazione longitudinale di modo che come prodotti finali appaiano solo particelle massicce. Questo fenomeno viene usualmente denominato meccanismo di Higgs.⁷

Il suggerimento per il verificarsi di un simile fenomeno proveniva dalla teoria microscopica della superconduttività di Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS).¹⁰ Gli autori avevano mostrato che per certe sostanze a temperature prossime allo zero assoluto, qualora fosse

presente un campo fononico che esercitasse una azione attrattiva tra fermioni in prossimità della superficie di Fermi, si poteva avere formazione di coppie legate (coppie di Cooper) con conseguente instabilità dello stato fondamentale (condensazione) e apparizione nella transizione di fase, di un "gap" nello spettro di eccitazione di particella singola. Gli stati legati fermionici seguivano, in assenza di un campo a lungo raggio di azione esterno, una legge di dispersione lineare senza gap.

La presenza di un potenziale elettromagnetico trasformava questi potenziali bosoni di Goldstone in plasmoni con una frequenza minima di eccitazione, la frequenza del plasma, facendo così acquisire ai mesoni vettori una componente longitudinale (effetto Meissner)¹³. Gli stati legati senza gap nello spettro di eccitazione non apparivano quindi come eccitazioni fisiche in un superconduttore immerso in un campo elettromagnetico esterno.

Y. Nambu e G. Jona-Lasinio¹⁸ trasposero il modello BCS della superconduttività alla teoria relativistica di campo. Essi mostrarono che, in analogia all'apparire del gap nello spettro di eccitazione di un superconduttore, una massa fermionica poteva venire generata in una transizione di fase con rottura spontanea del gruppo di simmetria chirale.

L'aspetto più attrattivo del modello di Nambu e Jona-Lasinio rispetto ai modelli in cui la rottura spontanea della simmetria viene ottenuta tramite l'introduzione di campi scalari con termine di massa col segno errato, risiede da un lato nell'assenza dell'arbitrarietà dovuta all'introduzione dei campi a spin zero con tutti i parametri indeterminati presenti nella Lagrangiana dei medesimi (si veda per esempio la ref. 19), e dall'altro nell'interesse che una possibile origine dinamica della massa fermionica può avere. A giudizio dei fautori di una teoria del primo tipo, i bosoni scalari devono riguardarsi come entità fenomenologiche, e superflue nel modello di Nambu ove i bosoni di Goldstone appaiono invece come stati legati fermione-antifermione e quindi come enti derivati. Come poi un mesone vettore a massa zero eventualmente presente nella teoria possa divenire anch'esso massiccio fu indicato per la prima volta da Schwinger.²⁰

Questo accade nel caso che il tensore di polarizzazione proprio relativo al mesone considerato sviluppi un polo a zero momento quadrato. Ad una situazione di questo tipo ci si riferirà in seguito come ad un meccanismo di simmetria autoconsistentemente o dinamicamente rotta. Si sottolinea che la differenza fra i due tipi di rottura spontanea della simmetria non risiede tanto nei prodotti finali che da essa scaturiscono, quanto piuttosto nei differenti meccanismi per generare le masse. Il meccanismo di Higgs fa uso di campi a spin zero introdotti esternamente, mentre la rottura dinamica della simmetria avviene attraverso l'azione degli stessi bosoni di gauge presenti ab initio nel modello.

In questa tesi si analizzano alcuni modelli che fanno uso, in modi disparati, della rottura dinamica della simmetria della Lagrangiana per generare masse fermioniche e bosoniche partendo da Lagrangiane con campi vettoriali a massa zero, senza far uso di campi scalari. Si considera sia il caso di fermioni a massa zero che il caso di fermioni massicci, selezionando in questo secondo caso gruppi di simmetria che ammettono la presenza della massa fermionica.

Il primo capitolo contiene una breve rassegna della teoria microscopica (BCS) della superconduttività con lo scopo di mettere in luce gli aspetti successivamente generalizzabili ad una teoria di campo relativistica. In conclusione del capitolo viene esaminata la teoria fenomenologica di Ginzburg e Landau per stabilire già a questo livello parallelismi tra la teoria da costoro sviluppata ed il meccanismo di Higgs con campi scalari.

Nel secondo capitolo vengono illustrate le analogie che sussistono tra la teoria BCS della superconduttività e le teorie di gauge abeliane e non abeliane. Viene data anche una breve descrizione del primo modello relativistico che presenta una rottura dinamica della simmetria, il modello di Y.Nambu e G. Jona-Lasinio.

Nel capitolo successivo viene esaminata la possibilità di rottura dinamica della simmetria in modelli di gauge abeliani e si indaga sulla consistenza di una teoria di questo tipo. Si sviluppa uno schema di approssimazione che permette di ottenere soluzioni non perturbative con un grado di simmetria inferiore rispetto a quello presente

nella Lagrangiana, senza violare le identità di Ward della teoria. Le equazioni integrali relative ai modelli esaminati vengono risolte esplicitamente nell'ordine più basso nelle costanti di accoppiamento. Si considera la consistenza matematica e la stabilità delle soluzioni ottenute e si deriva la teoria fenomenologica equivalente, atta a fornire una descrizione fedele della teoria fondamentale nella regione delle basse energie.

Nel capitolo terzo si estendono le considerazioni precedenti a Lagrangiane con gruppi di simmetria non abeliani. Vengono prese in esame teorie di Yang-Mills con accoppiamento a campi di materia, ma si indaga anche sulla consistenza di uno schema per la generazione delle masse bosoniche in teorie di Yang-Mills pure. Anche qui viene discusso il problema della consistenza matematica e si avanzano alcune ipotesi sulla rilevanza fisica di queste teorie.

Nell'ultimo capitolo viene applicato ad un semplice modello abeliano un metodo variazionale studiato recentemente per indagare più a fondo la struttura non lineare dei modelli con rottura dinamica della simmetria. In questo contesto emerge in maniera naturale un metodo per affermare la favoribilità energetica delle soluzioni dinamicamente asimmetriche rispetto alle soluzioni simmetriche.

C A P I T O L O I °

ROTTURA DINAMICA DELLA SIMMETRIA IN TEORIA DI CAMPO NON RELATIVISTICA. LA TEORIA MICROSCOPICA (BCS) DELLA SUPERCONDUTTIVITA'.

Questo capitolo è dedicato all'illustrazione del meccanismo di rottura dinamica della simmetria in un contesto non relativistico, nella teoria microscopica (BCS) della superconduttività.

Il primo passo per una comprensione a livello microscopico del fenomeno della superconduttività fu, come è noto, effettuato da L.N. Cooper. Egli aveva mostrato, in un semplice modello, che una debole interazione attrattiva tra fermioni prossimi alla superficie di Fermi (la superficie di momento massimo per gli elettroni in un solido a temperatura prossima allo zero assoluto) poteva dare luogo a stati legati. Lo stato fondamentale del mezzo noninteragente diveniva instabile per formazione di coppie e la energia finita di legame forniva una spiegazione qualitativa per la natura delle fessure (gap) nello spettro di eccitazione di particella singola del solido. Furono Bardeen, Cooper e Schrieffer¹⁰ a realizzare che la interazione attrattiva tra i fermioni postulata da Cooper trovava la sua ragione fisica nella presenza dell'interazione fononica dovuta alle vibrazioni del reticolo cristallino. Questa interazione rendeva conto di alcuni effetti osservati empiricamente (l'effetto isotopico) ed era effettivamente attrattiva per elettroni in prossimità della superficie di Fermi. Questo capitolo è dedicato allo studio di alcuni aspetti generalizzabili alle teorie relativistiche del modello microscopico BCS per la superconduttività.

E' noto che alla interazione fononica in un cristallo può venire associato nel formalismo della seconda quantizzazione un operatore di campo, per esempio in descrizione di Schrödinger $\Psi(\vec{x})$, e se $\psi_\alpha(\vec{r})$ è l'operatore di campo associato ai fermioni (particelle o buche) del cristallo, la Hamiltoniana che descrive il siste

ma accoppiato elettrone-fonone è data da :

$$\begin{aligned}
 H &= H_{ee} + H_{ph} - g \int d_3 \vec{x} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{x}) \psi_{\alpha}(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) \\
 H_{ee} &= \int d_3 \vec{x} \psi^{\dagger}(\vec{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 \right) \psi(\vec{x}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \iint d_3 \vec{x} d_3 \vec{x}' \psi^{\dagger}(\vec{x}) \psi^{\dagger}(\vec{x}') V(\vec{x}, \vec{x}') \psi(\vec{x}) \psi(\vec{x}') \\
 H_{ph} &= \int d_3 \vec{x} \varphi(\vec{x}) \left(-\hbar^2 \Delta_2 \right) \varphi(\vec{x}) \quad (1)
 \end{aligned}$$

dove $V(\vec{x}, \vec{x}')$ indica il potenziale relativo ad altre possibili interazioni tra i fermioni oltre a quella fononica. I campi soddisfano alle usuali relazioni di commutazione :

$$\{ \psi_{\alpha}(\vec{x}), \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{y}) \} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})] = \delta(\vec{x} - \vec{y}) .$$

$\varphi(\vec{x})$ può venire decomposto in parti di creazione e parti di distruzione :

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \left[c_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(\vec{x}) + c_{\vec{k}}^{\dagger} \phi_{\vec{k}}^*(\vec{x}) \right]$$

dove $\phi_{\vec{k}}(\vec{x})$ e $\phi_{\vec{k}}^*(\vec{x})$ sono le funzioni d'onda di particella singola e la somma è estesa a tutti i numeri quantici di particella singola. In un sistema traslazionalmente invariante per $\phi_{\vec{k}}(\vec{x})$ si possono usare onde piane $\exp i\vec{k} \cdot \vec{x}$ con la legge di dispersione fononica $\omega_{\vec{k}} = c|\vec{k}|$ dove c è la velocità di propagazione delle onde sonore.

Analogamente si può decomporre il campo fermionico :

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}, \lambda} \psi_{\vec{k}\lambda}(\vec{x}) c_{\vec{k}\lambda}$$

dove le $\psi_{\vec{k}\lambda}(\vec{x})$ sono funzioni d'onda di particella singola. Nel caso di un mezzo a temperatura zero è utile ridefinire gli operatori

$c_{\vec{k}\lambda}$ come :

$$c_{\vec{k}\lambda} = \begin{cases} a_{\vec{k}\lambda} & k > k_F & \text{particelle} \\ b_{-\vec{k}\lambda}^{\dagger} & k < k_F & \text{buche} \end{cases}$$

dove $a_{\vec{k}\lambda}^+$ e $a_{\vec{k}\lambda}$ sono creatori e distruttori, rispettivamente, di particelle di momento \vec{k} con $|\vec{k}| > k_F$ e indice di spin λ ($\lambda = \pm \frac{1}{2}$); $b_{\vec{k}\lambda}^+$ e $b_{\vec{k}\lambda}$ sono creatori e distruttori di buche all'interno del mare di Fermi ($|\vec{k}| < k_F$). Lo stato fondamentale di un gas di elettroni noninteragente a $T=0$ è caratterizzato da un mare di Fermi riempito e quindi dall'assenza di particelle e buche. Denotato con $|\Phi_0\rangle$ questo stato si ha :

$$b_{\vec{k}\lambda} |\Phi_0\rangle = a_{\vec{k}\lambda} |\Phi_0\rangle = 0$$

La introduzione di particelle e buche è reminescente della decomposizione di uno spinore di Dirac in creatori e distruttori relativi ad elettroni e positroni. E' da notare tuttavia che la distinzione tra particelle e buche perde significato per temperature finite, in quanto non esiste più in questo caso una superficie di Fermi netta. La Hamiltoniana (1) è difficilmente trattabile in maniera esatta e ci si limita quindi a studiare un modello semplificato. A questo scopo la interazione fononica tra elettroni viene riprodotta da un potenziale $V(\vec{x}, \vec{x}') = -g^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ attrattivo tra fermioni. Per studiare gli effetti di un campo magnetico su un superconduttore viene inoltre introdotto il potenziale vettore $\vec{A}(\vec{x})$ accoppiato minimalmente al campo fermionico. Per ammettere una possibile variazione del numero totale di particelle di preferisce usare la Hamiltoniana gran-canonica $K = H - \mu N$ dove μ è il potenziale chimico e N è l'operatore numero di particelle :

$$N = \int d_3 \vec{x} \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \psi_\alpha(\vec{x})$$

In conclusione la Hamiltoniana gran-canonica modello per un gas di elettroni in presenza di un campo magnetico è data da :

$$K = K_0 + V = \int d_3 \vec{x} \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \left\{ \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}) \right]^2 - \mu \right\} \psi_\alpha(\vec{x}) - \frac{1}{2} g \int d_3 \vec{x} \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \psi_\beta^\dagger(\vec{x}) \psi_\beta(\vec{x}) \psi_\alpha(\vec{x}) \quad (2)$$

dove $-e$ è la carica dell'elettrone e g è > 0 . La natura singolare del potenziale dà luogo a integrali divergenti che vengono resi finiti introducendo un cut-off ω_D alla frequenza di Debye, che è una frequenza fononica massima, legata alla natura discreta del reticolo cristallino.

La Hamiltoniana (2) viene ulteriormente semplificata utilizzando la approssimazione autoconsistente di Hartree-Fock a temperatura finita. Questa consiste nell'approssimare V con la espressione bilineare nei campi :

$$V \cong V_{HF} = -g \int d_3 \vec{x} \left[\langle \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \psi_\alpha(\vec{x}) \rangle_{HF} \psi_\beta^\dagger(\vec{x}) \psi_\beta(\vec{x}) - \langle \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \psi_\beta(\vec{x}) \rangle_{HF} \psi_\beta^\dagger(\vec{x}) \psi_\alpha(\vec{x}) \right] \quad (3)$$

dove $\langle \hat{O} \rangle$ indica la media d'insieme dello operatore \hat{O} valutata con l'operatore statistico S_G dato da $S_G = e^{\beta(\Omega - K)}$, dove Ω è il potenziale termodinamico e $\beta = (K_B T)^{-1}$ (K_B è la costante di Boltzmann) :

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} (S_G \hat{O}) = \frac{\text{Tr} (e^{-\beta K} \hat{O})}{\text{Tr} e^{-\beta K}}$$

La traccia si intende su tutti gli stati j con fissato N e poi su N stesso :

$$\text{Tr} (e^{-\beta K} \hat{O}) = \sum_{N,j} \langle N,j | e^{-\beta K} \hat{O} | N,j \rangle$$

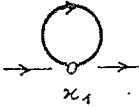
e il potenziale termodinamico è dato, come è noto dalla meccanica statistica, da :


$$\Omega(T, V, \mu) = -K_B T \ln [\text{Tr} e^{-\beta K}]$$

$\langle \hat{O} \rangle_{HF}$ indica la media d'insieme valutata con K in approssimazione di Hartree-Fock, cioè con V_{HF} invece di V :

$$S_{HF} = \frac{e^{-\beta K_{HF}}}{T_2 e^{-\beta K_{HF}}}, \quad K_{HF} = K_0 + V_{HF}$$

La posizione (3), che linearizza le equazioni del moto per $\psi(\vec{x})$, è equivalente ad usare come inserzione di autoenergia fermionica propria Σ^* la sua espressione all'ordine più basso, ma rimpiazzando i propagatori liberi con propagatori vestiti :

$$\Sigma^*_{HF}(\kappa_1, \kappa_2) = 2 \delta_3(\vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2) \cdot \text{diagramma}$$


 : propagatore fermionico vestito.

Il propagatore fermionico vestito è definito da :

$$g_{\alpha\beta}(\vec{\kappa}_1, \tau_1, \vec{\kappa}_2, \tau_2) = - \langle T_2 \psi_\alpha^+(\vec{\kappa}_1, \tau_1) \psi_\beta(\vec{\kappa}_2, \tau_2) \rangle$$

dove $\psi_\alpha(\vec{x}, \tau)$ è un operatore di Heisenberg a tempo immaginario :

$$\psi_\alpha(\vec{x}, \tau) = e^{K_{HF} \tau / \hbar} \psi_\alpha(\vec{x}) e^{-K_{HF} \tau / \hbar}$$

T_2 indica l'ordinamento temporale rispetto a τ con segno - per ogni permutazione dei campi fermionici.

La posizione nella equazione (3) è tuttavia troppo semplificatrice e non rende conto delle caratteristiche peculiari di un superconduttore, e cioè della possibilità che elettroni con spin opposti prossimi alla superficie di Fermi possano formare uno stato legato rendendo quest'ultima instabile. Si introducono quindi due termini che rappresentano la ampiezza di accoppiamento richiesta e si pone :

$$V \cong V_{HF} + V_P = V_{HF} - \int d_3 \vec{x} \left[\langle \psi_\downarrow^+(\vec{x}) \psi_\uparrow^+(\vec{x}) \rangle \psi_\uparrow(\vec{x}) \psi_\downarrow(\vec{x}) + \psi_\downarrow^+(\vec{x}) \psi_\uparrow^+(\vec{x}) \langle \psi_\uparrow(\vec{x}) \psi_\downarrow(\vec{x}) \rangle \right]$$

(4)

$\psi_{\uparrow}(\vec{x})$ indica un campo fermionico con proiezione dello spin in una direzione arbitraria e per \downarrow in quella opposta. La correzione V_{HF} si può assumere circa uguale nel caso dello stato normale e dello stato superconduttore e per semplicità viene omessa. In conclusione si ottiene come Hamiltoniana efficace : $K_{eff} = K_0 + V_P$ e per autoconsistenza tutte le medie di insieme verranno in seguito valutate con K_{eff} al posto di K .

Per la presenza del termine V_P la teoria non conserva più il numero di particelle (infatti si vede che $[N, K_{eff}] \neq 0$) e le coppie di Cooper che vengono a formarsi subiscono una condensazione del tipo Bose-Einstein.

Lo stato fondamentale $\langle \Omega |$ a $T=0$ di un superconduttore, come esso fu ottenuto da Bardeen, Cooper e Schrieffer con un metodo variazionale, è infatti sovrapposizione di stati di coppia :

$$|\Omega\rangle = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\vec{k}\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle$$

dove $u_{\vec{k}}$ e $v_{\vec{k}}$ sono coefficienti, $u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1$, e $c_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}$ e $c_{-\vec{k}\lambda}$ sono creatori e distruttori di elettroni, \uparrow e \downarrow sono le due possibili proiezioni dello spin e $|0\rangle$ indica lo stato di vuoto (assenza di elettroni).

In virtù di questa circostanza l'operatore composto corrispondente alla coppia di Cooper, acquista un valore di aspettazione non nullo sullo stato fondamentale a $T=0$ e la funzione d'onda $\Delta^*(\vec{x})$ delle coppie assume significato classico (funzione di gap) :

$$\Delta^*(\vec{x}) = -g \langle \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\vec{x}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\vec{x}) \rangle \neq 0 \quad (5)$$

o nello spazio dei momenti :

$$\langle e^{\dagger}(\vec{k}) \rangle = \langle c_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} c_{-\vec{k}\lambda}^{\dagger} \rangle = s_{\vec{k}} e^{i\theta} \neq 0$$

dove $e^{\dagger}(\vec{k})$ rappresenta un creatore di coppie di Cooper che soddisfa a relazioni di commutazione simili a quelle relative ad operatori bosonici. La fase θ caratterizza i differenti stati fondamentali

degeneri (nel caso di un superconduttore la fase della funzione d'onda di una coppia ha significato fisico in quanto rappresenta la fase relativa tra due funzioni d'onda di particella singola. Si veda per esempio l'effetto Josephson ¹¹).

La degenerazione dello stato fondamentale rispetto alla fase indica la presenza di una situazione di rottura spontanea della simmetria rispetto al gruppo di fase elettromagnetico, il cui generatore è N.

Alla stessa conclusione si può giungere considerando una trasformazione canonica che diagonalizza la Hamiltoniana efficace a T=0. Questo metodo di soluzione è chiaramente non perturbativo. Le quasi particelle, i cui creatori e distruttori diagonalizzano la Hamiltoniana modello di Bogoliubov ¹², analoga a quella sopra esibita, non sono autostati della carica elettrica essendo sovrapposizione di stati a carica opposta (di particella e buca, prendendo come sopra a riferimento la superficie di Fermi) :

$$\alpha_{\vec{k}} = u_k C_{\vec{k}\uparrow} - v_k C_{-\vec{k}\downarrow}^+$$

$$\beta_{-\vec{k}} = u_k C_{-\vec{k}\downarrow} + v_k C_{\vec{k}\uparrow}^+$$

($C_{\vec{k}\lambda}$ e $C_{\vec{k}\lambda}^+$ sono gli usuali distruttori e creatori di elettroni di momento \vec{k} e spin λ , $\lambda = +\frac{1}{2} : \uparrow$, $\lambda = -\frac{1}{2} : \downarrow$, v_k e u_k sono coefficienti dipendenti solo da $|\vec{k}|$). Il vuoto di quasi particelle è lo stato fondamentale del superconduttore a T=0 :

$$\alpha_{\vec{k}} |\Omega\rangle = \beta_{-\vec{k}} |\Omega\rangle = 0$$

e rompe la simmetria di fase della Hamiltoniana modello associata alla conservazione della carica.

Dalla Hamiltoniana efficace K_{eff} si derivano, sfruttando le relazioni di commutazione tra i campi, le equazioni del moto per le funzioni di Green a temperatura finita. Nel caso di un mezzo uniforme in assenza di campo magnetico queste possono venire risolte esplicitamente. I poli delle funzioni di Green forniscono allora, come è noto dalla rappresentazione di Lehmann, le energie di eccitazione di

particella singola del sistema. Lo spettro di eccitazione in questo caso è della forma :

$$E_{\vec{k}} = (\Delta^2 + \xi_{\vec{k}}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

dove Δ è la trasformata di Fourier della funzione di gap $\Delta^*(\vec{r})$ e $\xi_{\vec{k}}$ è lo spettro di eccitazione in un gas di elettroni non interagente, misurato rispetto al potenziale chimico:

$$\xi_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \quad (7)$$

La energia di eccitazione $E_{\vec{k}}$ ha quindi un minimo uguale a Δ . Il gap Δ soddisfa in questo caso ad una equazione algebrica non lineare :

$$\Delta = g N(0) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}}} \tanh \frac{(\xi^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}}}{2k_B T}$$

con $N(0) = \frac{m k_F}{2\pi^2 \hbar^2}$, che fornisce per $T=0$:

$$\Delta(0) = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)g}\right)$$

dove ω_D è una frequenza fononica massima (di Debye). Il gap è quindi una quantità non analitica nella costante di accoppiamento e dipende dal cutoff ω_D .

In generale lo spettro di eccitazione di particella singola è ancora della forma (6) con la posizione (7), ma Δ dipende da \vec{k} e soddisfa ad una equazione integrale non lineare. Per $T=0$ Bogoliubov¹² ha mostrato che questa assume la forma :

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}'} \langle \vec{k}, -\vec{k} | V | \vec{k}', -\vec{k}' \rangle \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{E_{\vec{k}'}}$$

con $E_{\vec{k}} = (\Delta_{\vec{k}}^2 + \xi_{\vec{k}}^2)^{\frac{1}{2}}$ e $\langle \dots | V | \dots \rangle$ rappresenta l'elemento di matrice del potenziale V attrattivo fermionico tra stati di momento determinato.

La situazione che si presenta a questo punto è mostrata nel

diagramma della fig.1. La interazione fononica attrattiva, rappresentata da una linea ondulata, induce una transizione tra elettroni di momento e spin opposti (prossimi alla superficie di Fermi) che ha come effetto la formazione di uno stato legato e l'apparizione di un gap nello spettro di eccitazione di particella singola.

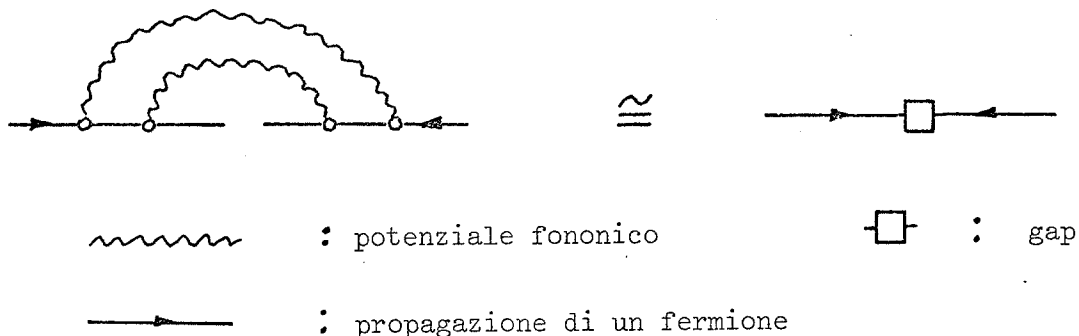


fig.I Conversione elettrone-buca dovuta allo scambio di fononi e apparizione del gap .

La freccia indica la direzione di propagazione della carica elettrica.

Il gap appare in conseguenza del termine di interazione nella Hamiltoniana (4) che permette la creazione (o distruzione) di due elettroni simultaneamente, incrementando (rispettivamente diminuendo) la carica elettrica di due unità. Questo è solo un modo differente per asserire che l'interazione fononica rende possibili transizioni non perturbative tra stati di carica opposta e cioè tra particelle e buche a $T=0$. Alla stessa conclusione si giunge osservando la (5) .

P.Anderson¹³ e Y.Nambu¹⁴ osservarono che in un superconduttore sono presenti oltre alle eccitazioni quasi-particellari anche modi collettivi la cui presenza è necessaria per ristabilire la invarianza di gauge globale, e quindi la conservazione della carica, in assenza di un campo elettromagnetico esterno. I modi collettivi sono conseguenza di eccitazione di coppie di Cooper e seguono una legge di dispersione continua senza gap. Essi sono i bosoni di Goldstone del modello considerato¹⁴ e la loro legge di dispersione è quindi della forma :

$$q_0^2 \xrightarrow{|\vec{q}| \rightarrow 0} \alpha^2 \vec{q}^2 \quad \text{con} \quad \alpha^2 \cong \hbar^2 k_F^2 / 3m^2$$

Questa situazione è illustrata nella fig.2. In virtù della presenza dell'attrazione fononica si formano stati legati la cui energia tende a zero quando il momento va a zero.

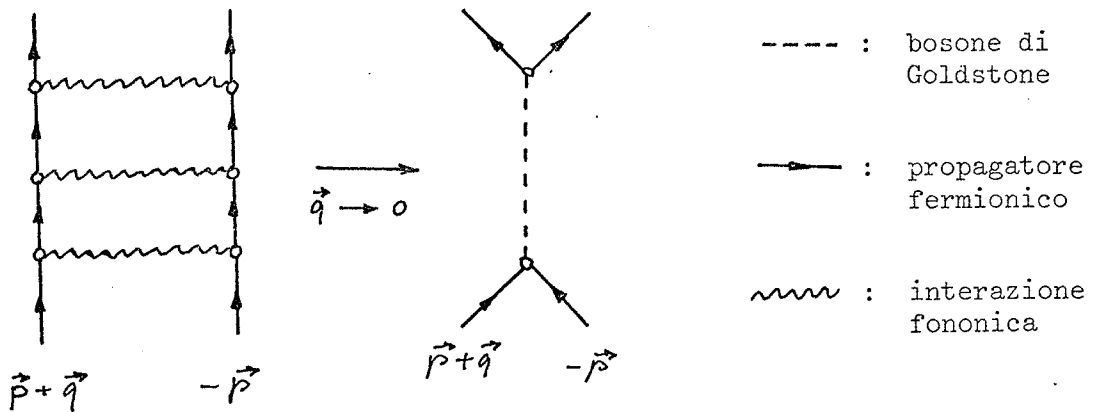


fig.2 Il bosone di Nambu - Goldstone .

In presenza di un campo magnetico esterno si può vedere che la legge di dispersione delle eccitazioni collettive viene modificata in :

$$q_0^2 \xrightarrow{|\vec{q}| \rightarrow 0} \frac{4\pi e^2 n}{m} \equiv \omega_{pe}^2(0)$$

dove $\omega_{pe}(0)$ è la frequenza di oscillazione classica del plasma per un gas elettronico ed è proporzionale al prodotto del quadrato della carica elettrica per la densità elettronica n .

Ora è noto che per un superconduttore di London la lunghezza di penetrazione è data da :

$$\lambda_L(T=0) = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove $n_s(T=0) \cong n + O(\sqrt{\Delta_0})$ è la densità di superelettroni. Ne consegue quindi la relazione :

$$\lambda_L^{-1}(0) \cong \omega_{pe}(0) / c$$

Inoltre tenendo conto che per un superconduttore di London si può derivare dalla teoria microscopica, in presenza di un campo magnetico,

la relazione :

$$\vec{J}_s(\vec{x}) = - \frac{n_s e^2}{m c} \vec{A}(\vec{x})$$

dove $\vec{J}_s(\vec{x})$ è la supercorrente, e si ha in definitiva in presenza di un campo magnetico :

$$\mathcal{H}_I^{(e.m.)}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) \cong - \frac{c}{4\pi} \omega_{pe}^2(0) \vec{A}^2(\vec{x})$$

Quest'ultima relazione mostra l'apparire dell'effetto Meissner : il campo elettromagnetico diviene assimilabile ad un campo massiccio e il range del potenziale vettore nel mezzo superconduttore è finito e pari a $c/\omega_{pe}(0) = \lambda_L$. Un risultato analogo si ottiene considerando superconduttori che non sono di London.

Quest'ultimo esempio mostra come avviene il meccanismo per generare una massa fotonica gauge invariante. In presenza di un campo magnetico le eccitazioni collettive (i bosoni di Goldstone) si accoppiano al campo magnetico per dare luogo ad una componente longitudinale. I bosoni di Goldstone stessi si disaccoppiano dalla teoria e non compaiono come eccitazioni fisiche. I fononi acustici, essendo pari per coniugazione di carica (a differenza della corrente elettromagnetica che è dispari), non acquistano "massa" e si disaccoppiano dai bosoni di Goldstone (anch'essi dispari sotto coniugazione di carica). (Si ricorda che i prodotti bilineari covarianti si trasformano per coniugazione di carica C secondo : S,P,A \xrightarrow{C} + S,P,A; V,T \xrightarrow{C} - V,- T).

La situazione che si presenta in conclusione è illustrata nella fig. 3.

E' inoltre interessante notare che lo stato fondamentale superconduttore è energeticamente favorito rispetto allo stato normale (una situazione peraltro naturale se si pensa al metodo variazionale col quale Bardeen, Cooper e Schrieffer determinarono lo stato fondamentale del superconduttore).

La differenza nel potenziale termodinamico tra i due stati, normale e superconduttore, è data da ¹⁵ :

$$\Omega_S - \Omega_N \cong - \int_0^g dg' \frac{1}{g'^2} \int d_3 \vec{x} |\Delta(\vec{x})|^2$$

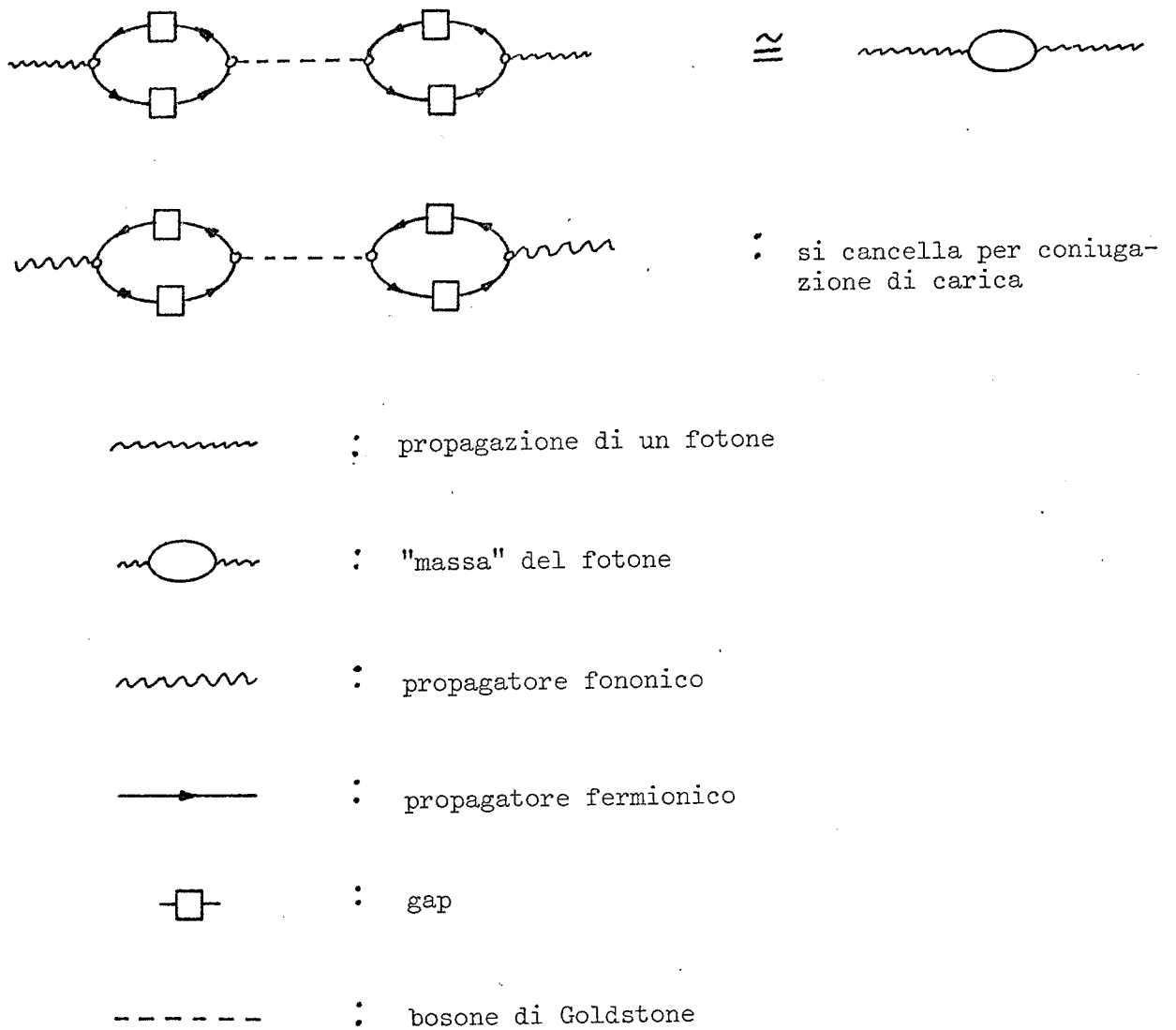


fig.3 Effetto Meissner .

dove $\Delta(\vec{x})$ dipende da g . Con un calcolo approssimato si vede che per $T \rightarrow 0$ si ha :

$$\Omega_S - \Omega_N = -\frac{1}{2} V N(0) \Delta^2 < 0$$

con $V = \int d_3 \vec{x}$.

Il problema della favoribilit  energetica dello stato "superconduttore" in teoria relativistica di campo appare invece, come si vedr  pi  avanti (Cap. V) , tuttora aperto.

La teoria fenomenologica di Ginzburg e Landau

La teoria microscopica BCS fornisce anche una interpretazione per le grandezze fenomenologiche della teoria di Ginzburg e Landau

Introducendo la funzione d'onda di Ginzburg e Landau legata al parametro d'ordine o funzione di gap $\Delta^*(\vec{x})$ dalla relazione :

$$\phi(\vec{x}) = \left[\frac{7 \zeta(3) n}{8(\pi k_B T_c)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta(\vec{x})$$

con K_B = costante di Boltzmann e T_c = temperatura critica del superconduttore (la temperatura alla quale avviene la transizione di fase tra stato normale e stato superconduttore), si ottengono le seguenti equazioni di moto approssimate per un superconduttore in un campo magnetico esterno $A_k(\vec{x})$ ^{15,16} :

$$[-i\partial_k + 2e A_k]^2 \phi + 2\mu^2 \phi - 4\lambda \phi |\phi|^2 = 0$$

con :

$$\lambda = \frac{2m A}{n} > 0, \quad \mu^2 = 4m A \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) < 0$$

e

$$A = \frac{6\pi^2 (k_B T_c)^2}{7 \zeta(3) \varepsilon_F^0} \quad \varepsilon_F^0 = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

Si vede immediatamente che questa equazione del tipo di Schrödinger non lineare può venire derivata dalla densità Lagrangiana :

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\partial_k - 2ie A_k) \phi^* (\partial_k + 2ie A_k) \phi - V(\phi, \phi^*)$$

con :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$V(\phi, \phi^*) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4$$

Per la presenza del termine di massa negativo ($\mu^2 < 0$) si ha che il potenziale V ha un minimo in corrispondenza di $|\phi| \neq 0$. Ridefinendo i campi scalari si può mostrare l'apparizione di un bosone di Goldstone che si combina con il campo elettromagnetico

per generare una componente di polarizzazione longitudinale.

E' da sottolineare che la teoria fenomenologica della superconduttività non determina μ^2 e λ teoricamente e non fornisce informazioni sullo spettro di eccitazione fermionico.

C A P I T O L O II°

ANALOGIE IN TEORIA DI CAMPO RELATIVISTICA

Dalla precedente esposizione di alcuni caratteri fondamentali della teoria BCS della superconduttività risulta a questo punto facile riferire quali debbano essere le caratteristiche di una teoria di campo relativistica che intenda avvalersi di un meccanismo del tipo precedentemente illustrato per generare le masse, che corrispondono al gap in teoria BCS, delle particelle fisiche.

La prima generalizzazione alla teoria di campo relativistica del meccanismo che induce una transizione di fase nel superconduttore si ebbe ad opera di Y. Nambu^{17,18}. Nambu mosse dalla considerazione che la corrente assiale poteva essere conservata anche in presenza di masse fermioniche (generate autoconsistentemente) a patto che la funzione di vertice assiale $\Gamma_5^\mu(p, p')$ acquisisse un polo a zero momento trasferito (polo di Nambu-Goldstone). Infatti se

$$j_\mu^5 = i \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \quad \text{è conservata :}$$

$$\partial_\mu j_\mu^5 = 0 \quad (1)$$

come segue dalle equazioni del moto assunte chiralmente invarianti, si ha d'altro canto che per una particella di Dirac massiccia (con la massa generata dinamicamente come il gap in teoria BCS) la equazione di continuità non è verificata : ($\psi^{(m)}$ è uno spinore che soddisfa alla equazione di Dirac con massa m)

$$\partial_\mu \bar{\psi}^{(m)} \gamma^\mu \gamma_5 \psi^{(m)} = 2m \bar{\psi}^{(m)} \gamma_5 \psi^{(m)} \quad (2)$$

Se il fermione massiccio deve essere autostato del sistema, l'unico modo in cui le due affermazioni precedenti possono venire riconciliate è che l'elemento di matrice dell'operatore relativo alla corrente assiale non sia semplicemente proporzionale a $i \gamma^\mu \gamma_5$, in virtù delle correzioni radiative :

$$\langle p' | j_\mu^5 | p \rangle = \bar{u}(p') \Gamma_5^\mu(p', p) u(p) \quad (3)$$

ove per ragioni di Lorentz invarianza Γ_s^μ è della forma :

$$\Gamma_s^\mu(p', p) = F_1(q^2) i \gamma^\mu \gamma^5 + F_2(q^2) q^\mu \gamma^5$$

con $q = p' - p$ e $p^2 = p'^2 = m^2$.

Dalla (2) e dalla (3) si ha : $F_1 = F_2 q^2/2m \equiv F$ e quindi :

$$\Gamma_s^\mu(p', p) = F(q^2) \left(i \gamma^\mu \gamma^5 + \frac{2m \gamma^5 q^\mu}{q^2} \right) \quad (4)$$

con $F(q^2)$ regolare per $q^2 \rightarrow 0$. La funzione di vertice acquista quindi un polo per $q^2 = 0$ che indica la presenza di uno stato intermedio a massa zero :

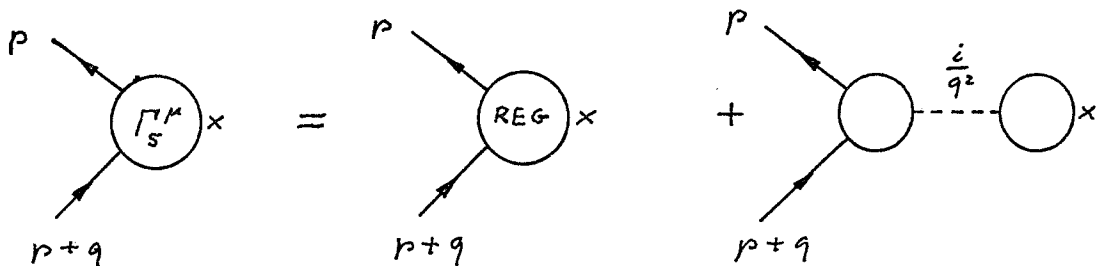


fig.I Decomposizione della funzione di vertice assiale in parte regolare e parte singolare per $q^2 \rightarrow 0$.

Quindi anche in teoria di campo relativistica è possibile ottenere da una Lagrangiana γ^5 - invariante fermioni massicci e una corrente assiale conservata ma è necessario che siano contemporaneamente presenti eccitazioni collettive a massa zero (almeno fintantochè non si estende l'invarianza di gauge globale ad una invarianza locale con la introduzione di bosoni di gauge).

Convieni a questo punto, per l'economia del discorso successivo, approfondire in alcuni punti la discussione del modello di Nambu.

La Lagrangiana usata da Nambu e Jona-Lasinio :

$$\mathcal{L}(x) = -\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + g_0 [(\bar{\psi} \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^5 \psi)^2] \quad (5)$$

consiste di fermioni a massa zero interagenti tramite un termine non lineare del tipo di Heisenberg. Un cutoff ultravioletto Λ deve venire introdotto per rendere la teoria finita. Per il teorema di Fierz la parte di interazione è equivalente a :

$$-\frac{1}{2} g_0 [(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 - (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi)^2] \quad (6)$$

La Lagrangiana (5) possiede due correnti conservate che corrispondono ai generatori chiralità χ e numero barionico N :

$$\begin{aligned} N : \quad \psi &\rightarrow e^{i\alpha_1} \psi & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha_1} \\ \chi : \quad \psi &\rightarrow e^{i\alpha_2 \gamma^5} \psi & \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha_2 \gamma^5} \end{aligned} \quad (7)$$

La assunzione cruciale che viene fatta in questo modello è che, nonostante la massa meccanica m_0 sia uguale a zero, la massa fisica m sia non nulla. La equazione per la massa fermionica è quindi :

$$\Sigma(\not{p}) \Big|_{i\delta, p=m} = \delta m = m \quad (8)$$

secondo la prescrizione di rinormalizzazione di Dyson.

All'ordine più basso in g_0 la (8), usando la equazione di Dyson per $\Sigma(\not{p})$, si traduce in :

$$\Sigma(\not{p}) = \text{---} \bigcirc \text{---} \equiv 2g_0 T_2 S_F(0) = m \quad (9)$$

con $S_F(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{x} \cdot p - m + i\epsilon}$, che è la approssimazione di Hartree-Fock, e quindi si ha :

$$m = -i \frac{8g_0 m}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10)$$

Con un cutoff invariante a $p^2 = \Lambda^2$ si ha dopo una rotazione di Wick: (scartando la soluzione triviale $m = 0$)

$$\frac{2\pi^2}{g_0 \Lambda^2} = 1 - \frac{m^2}{\Lambda^2} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \quad (11)$$

che è soddisfatta per $0 < 2\pi^2/g_0 \Lambda^2 < 1$ e quindi per piccoli g_0 se $\Lambda \rightarrow \infty$.

Si può a questo punto considerare la funzione di vertice assiale $\Gamma_S^\mu(p, p')$. Essa soddisfa alla identità di Ward (in conseguenza della invarianza chirale della Lagrangiana (5)) :

$$q_\mu \Gamma_S^\mu(p, p+q) = \gamma^5 S_F^{-1}(p+q) + S_F^{-1}(p) \gamma^5 \quad (12)$$

dove $S_F^{-1}(P)$ è l'inverso del propagatore fermionico.

Per $q \rightarrow 0$ si ottiene :

$$q_\mu \Gamma_S^\mu(p, p+q) = \{ \gamma^5, \Sigma(p) \}$$

Se $\Sigma(p) |_{p=m} = m$, allora la funzione di vertice si può decomporre in parte regolare e parte singolare per $q^2 \rightarrow 0$:

$$\Gamma_S^\mu(p, p+q) = \Gamma_S^\mu(\text{REG}) + \Gamma_S^\mu(\text{SING}) \quad (13)$$

(si confronti questa espressione con la fig.1). (Si ricorda che γ^5 non anticommute con uno scalare). Si può assumere consistentemente che la parte singolare della funzione di vertice sia data da :

$$\Gamma_S^\mu(\text{SING})(p, p+q) \underset{q \rightarrow 0}{\approx} 2m \gamma^5 \frac{q^\mu}{q^2} F(p^2) \quad (14)$$

dove $F(p^2)$ caratterizza la variazione in p^2 della componente scalare di $\Sigma(p)$ per p arbitrario.

La funzione di vertice Γ_S^μ soddisfa alla equazione integrale (di Bethe- Salpeter) :

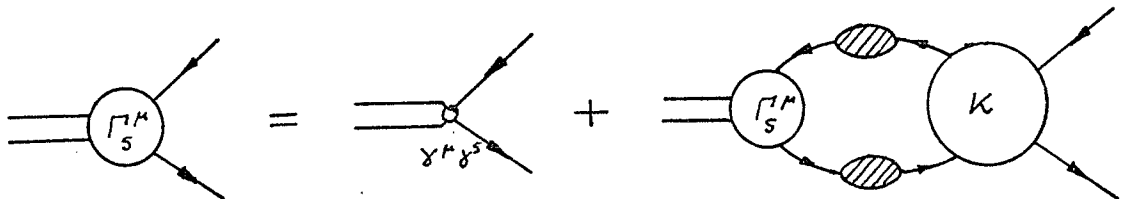


fig.2 Equazione di Dyson per la funzione di vertice assiale con il nucleo K irriducibile per particella singola .

dove il nucleo K è irriducibile per due fermioni nel canale s; per esempio il grafico non è contenuto in K.

Uguagliando i contributi singolari per $q^2 \rightarrow 0$ a destra e a sinistra nella fig. 2 si ha in notazione simbolica :

$$\Gamma_S^\mu(\text{SING}) = \int \Gamma_S^\mu(\text{SING}) \cdot K \quad (15)$$

che è la equazione di Bethe-Salpeter per $\Gamma_S^\mu(\text{SING})$.

La sua soluzione in approssimazione a catena con $K = \gamma^5 \gamma^5$, è, come si vede per sostituzione :

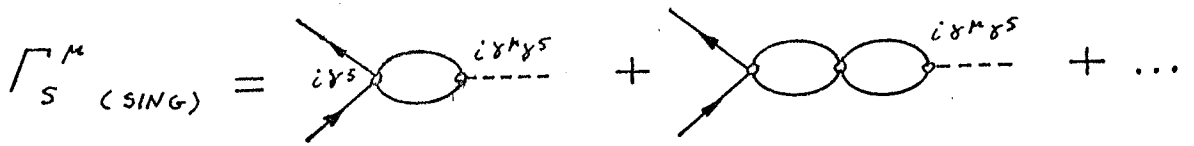


fig.3 La funzione di vertice assiale in approssimazione a catena .

--- indica la propagazione di una particella a massa zero, come nel la fig. 1. Analiticamente la serie si somma per dare :

$$\Gamma_S^\mu(SING) = i\gamma^5 \frac{1}{1 - J_P(0)} J_{PA} \quad (k \rightarrow 0) \quad (16)$$

con

$$J_P(k^2) = i\gamma^5 \text{ (loop) } i\gamma^5 = 1 - k^2 \frac{g_0}{4\pi^2} \int_{4m^2}^{\Lambda^2} dp^2 \frac{(1 - \frac{4m^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}}{k^2 + p^2}$$

e

$$J_{PA}(k^2) = i\gamma^5 \text{ (loop) } i\gamma^{\mu} \gamma^5 = \frac{im g_0}{(2\pi)^2} k^\mu \int_{4m^2}^{\Lambda^2} dp^2 \frac{(1 - \frac{4m^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}}{k^2 + p^2}$$

Inserendo questi due risultati nella (16) si ha :

$$\Gamma_S^\mu(SING) = 2m \gamma^5 \frac{q^\mu}{q^2} \quad (17)$$

all'ordine più basso in g_0 (\sim in approssimazione a catena). La (17), ottenuta in approssimazione a catena, è chiaramente in accordo con la identità di Ward (12) e con la equazione di Dyson (9) per l'autoenergia fermionica. Inoltre il modello di Nambu rappresenta la prima semplificazione del teorema di Goldstone, con rottura dinamica della simmetria chirale. La presenza delle particelle a massa zero è indicata dalla presenza del polo nella funzione di vertice per $q^2 \rightarrow 0$. Nel modello di Nambu sono inoltre presenti altre eccitazioni collettive, la cui presenza può venire mostrata iterando opportune "bolle" (v.sotto) nella espressione per l'ampiezza di diffusione per due fermioni. Iterando la bolla scalare si ha per l'ampiezza di diffusione per due fermioni S :

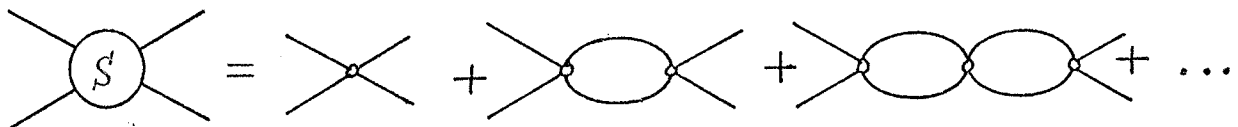
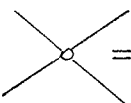



fig.4 Ampiezza di diffusione fermionica in approssimazione a catena .

$$= \frac{A}{1 - \mathcal{J}_S(k^2)}$$

con  = $i g_0$, A una costante e

$$\mathcal{J}_S(k^2) = i \text{  } i = \frac{g_0}{4\pi^2} \int_{4m^2}^{\Lambda^2} dp^2 \frac{(p^2 - 4m^2)(1 - 4m^2/p^2)^{\frac{1}{2}}}{k^2 + p^2}$$

Dalla equazione di autoconsistenza (10) si può vedere che $\mathcal{J}_S(4m^2) = 1$ e quindi si ha un polo nell'ampiezza di diffusione S per $k^2 = (2m)^2$. Questo indica la presenza di uno stato legato massiccio con spin-parità 0^+ . Iterando la "bolla" vettoriale :

$$i \gamma^\nu \text{  } i \gamma^\mu$$

si ottiene per la massa del mesone vettoriale $\mu_v^2 > \frac{8}{3} m^2$ che, come è mostrato nell'articolo di Nambu e Jona-Lasinio, dipende dal cutoff.

A conclusione di questa discussione del modello di Nambu si richiamerà la circostanza, senza darne una dimostrazione, che l'energia dello stato fondamentale superconduttore è minore rispetto alla energia dello stato fondamentale simmetrico. Infatti si ha per le energie dei rispettivi stati fondamentali :

$$E_{(NORH.)}^{(0)} - E_{(SUPERC.)}^{(m)} = -2V \int \frac{d_3 \vec{p}}{(2\pi)^3} [(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} - |\vec{p}|] > 0 \quad (18)$$

con $V = \int d_3 \vec{x}$, ed è quadraticamente divergente.

Preso quindi atto della plausibilità di soluzioni con rottura dinamica della simmetria in teoria di campo relativistica, si è condotti naturalmente a considerare estensioni ad una simmetria locale del modello precedente, e quindi Lagrangiane in cui i fermioni a massa

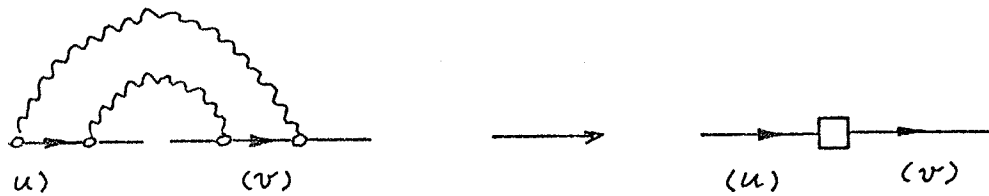
zero sono accoppiati minimalmente a bosoni di Yang-Mills.



Riferendosi ai suggerimenti della teoria BCS si persegue innanzitutto sistematicamente la analogia con l'immagine quasi-particellare di un superconduttore. Si effettua quindi semplicemente la sostituzione :

fase elettromagnetica (il gap provoca la rottura della simmetria ad essa associata)	→	fase chirale (la massa fermionica provoca la rottura della simmetria ad essa associata)
elettrone (buca) senza gap nello spettro di eccitazione	→	fermione (antifermione) a massa zero
fonone (campo attrattivo)	→	campo di gauge vettoriale (attrattivo)
fotone (potenziale a lungo raggio associato all'invarianza di gauge)	→	campo di gauge assiale
gap nello spettro di eccitazioni di particelle singole	→	massa fermionica

Nel caso di un superconduttore la interazione fononica induceva transizioni tra stati di particelle con spin opposti e momenti prossimi alla superficie di Fermi opposti. In questo caso invece la interazione vettoriale induce transizioni tra spinori di opposta chiralità generando una massa fermionica (La interazione assiale ha effetto repulsivo, come si vedrà nel capitolo successivo). Questa situazione è illustrata nella fig. 5.

Le eccitazioni di particelle singola non sono più autostati chirali bensì sovrapposizione di stati con chiralità opposta (così come le quasi-particelle in un superconduttore sono sovrapposizioni di stati di buca \uparrow e particella \downarrow). Si è ottenuta quindi una rottura dell'invarianza chirale e il vuoto non è più autostato della fase chirale; questa può venire scelta arbitrariamente per caratterizzarlo.



 : fermione a massa zero (la freccia indica la propagazione della carica; (u) e (v) indicano chiralità opposte)
 : propagatore vettoriale


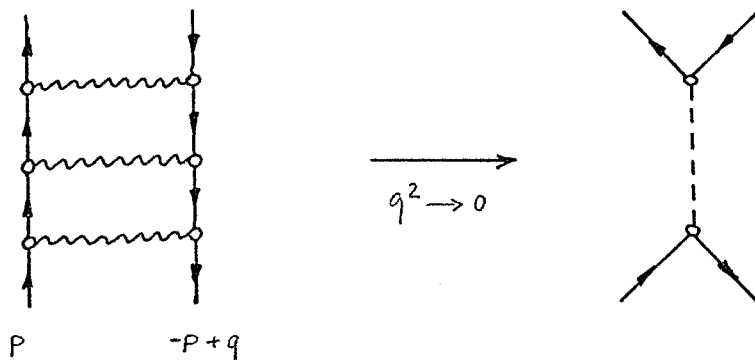
 : massa fermionica

fig.5 Analogia con la superconduttività in teoria di campo .

Alla degenerazione del vuoto corrispondono eccitazioni pseudo-scalari (pari per coniugazione di carica) a massa zero, se si assume l'apparire di un termine di massa scalare (si vedano le eq. 11, 12 del cap. III; se $\Sigma(p) \propto p \circ \uparrow \Rightarrow$ il vertice $f - \bar{f}$ - scalare di Goldstone è $\propto \gamma^5$). Queste eccitazioni si combinano con i bosoni vettori assiali (anch'essi pari per coniugazione di carica) generandone la massa, e si disaccoppiano contemporaneamente dal campo vettoriale che è dispari per coniugazione di carica (o per coniugazione chirale). La situazione a questo punto è compendiate dalla fig. (6).




 : bosone di Nambu-Goldstone (stato legato a massa zero)

fig.6 Il bosone di Goldstone come stato legato fermione - antifermione .

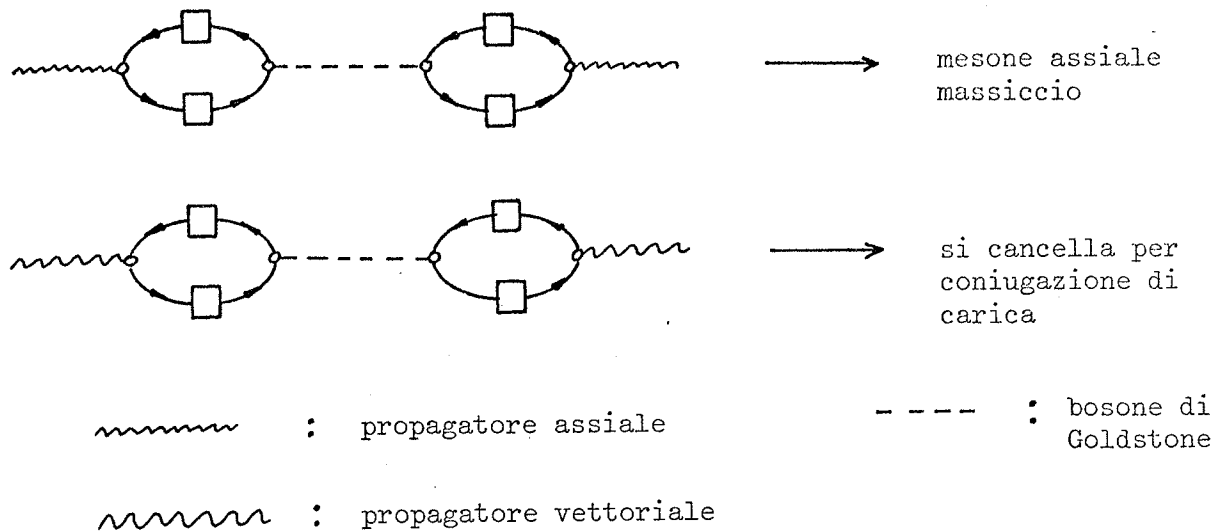


fig.7 Generazione della massa del bosone assiale .

Questo semplice modello viene descritto dalla seguente Lagrangiana minimale ($U(1) \otimes U(1)$) :

$$\mathcal{L}(x) = i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu}$$

$$i = A, V \quad D_\mu = \partial_\mu - i g_V V_\mu - i g_A \gamma^5 A_\mu \quad (19)$$

che ammette le simmetrie continue :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \delta \Psi &= i \theta_1 \Psi & \delta \bar{\Psi} &= -i \bar{\Psi} \theta_1 \\ \text{(b)} \quad \delta \Psi &= i \gamma^5 \theta_2 \Psi & \delta \bar{\Psi} &= i \bar{\Psi} \gamma^5 \theta_2 \end{aligned} \quad (20)$$

in forma infinitesima, e la simmetria discreta di riflessione spaziale se $g_V = g_A$.

Ci si aspetta generazione spontanea di massa per Ψ e A_μ , mentre V_μ deve rimanere a massa zero, come si può dedurre anche dalle identità di Ward relative alla (19).

Queste considerazioni possono venire generalizzate in maniera naturale fino ad abbracciare una teoria descritta da una Lagrangiana simmetrica per un arbitrario gruppo di Lie G (compatto) (con le uniche restrizioni derivanti dal problema delle anomalie della corrente assiale (v. cap.III)). Si scrive quindi per un generico modello, del quali si vogliono studiare le soluzioni che presentano una rot-

tura dinamica della simmetria, la Lagrangiana :

$$\mathcal{L}(x) = i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a{}^{\mu\nu}$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_a L_a A_\mu^a$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_a C^a{}_{bc} A_\mu^b A_\nu^c$$

$$[L^a, L^b] = i C^a{}_{bc} L^c \quad (\text{Generatori di G})$$

invariante per :

$$\delta \Psi(x) = -i L_a \theta^a(x) \Psi(x)$$

$$\delta A_\mu^a(x) = C^a{}_{bc} \theta^b(x) A_\mu^c(x) - \frac{1}{g_a} \partial_\mu \theta^a(x)$$

Se le masse fermioniche vengono generate dinamicamente dall'azione attrattiva dei campi di gauge, ci si aspetta la presenza di bosoni di Goldstone accoppiati a tutte le correnti che apparentemente non sono conservate e in cui è presente il termine anomalo ($\propto \frac{q^\mu}{q^2}$) sopra menzionato. Queste correnti generano trasformazioni ortogonali al sottogruppo rimasto intatto per la simmetria. I campi di gauge accoppiati di bosoni scalari acquistano una componente longitudinale che li rende massicci e i bosoni di Goldstone stessi si disaccoppiano dalla teoria.

Nel prossimo capitolo si esamineranno in dettaglio i concetti, qui introdotti per sommi capi.

C A P I T O L O III°

UN SEMPLICE MODELLO ABELIANO

Si esamineranno ora in dettaglio, come è stato anticipato nel precedente capitolo, le soluzioni non-perturbative della (19) che diano luogo a generazione di massa. La Lagrangiana che forma quindi il punto di partenza è :

$$\mathcal{L}(\pi) = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + g_A \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi A_\mu + g_V \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi V_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^V F_V^{\mu\nu} \quad (1)$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu}^V = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \quad \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

che è invariante per $\delta\Psi = i\theta\gamma^5\Psi$ e $\delta\Psi = i\theta\Psi$ e, almeno in apparenza, rinormalizzabile, nel senso che lo è la teoria simmetrica relativa alla (1).

La prima domanda che viene naturale porsi riguarda la motivazione di studiare modelli semplificati o poco realistici come il modello descritto dalla Lagrangiana (1). Quello che verrà mostrato nel capitolo successivo dedicato ai modelli non abeliani, più realistici, giustificherà per la presenza là degli stessi meccanismi studiati qui nel caso abeliano, ma complicati da matrici di rappresentazione del gruppo ed altri dettagli tecnici, la discussione, almeno nelle intenzioni circostanziata, di questi primi modelli. Le costanti di accoppiamento presenti nella (1), come si vedrà più avanti, risulteranno, in base alla loro forma, discriminatorie per i vari meccanismi di generazione spontanea delle masse, e l'analisi di questa circostanza permetterà di affrontare con maggiore dimestichezza i modelli più complessi.

Nei seguenti paragrafi verranno innanzitutto derivate le equa

zioni fondamentali atte a descrivere la situazione di simmetria dinamicamente rotta e si deriverà una importante regola di somma.

Quindi si analizzeranno le soluzioni delle equazioni integrali espresse con i nuclei di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala e si otterranno alcuni legami tra le masse delle particella e alcuni vincoli sulle costanti di accoppiamento.

Infine si delimiteranno i vari tipi di meccanismi (mutuamente escludentesi) atti a generare le masse fermioniche e bosoniche, e si costruirà la teoria fenomenologica. Di pari passo con l'insorgere di specifiche problematiche, verranno analizzate le questioni di consistenza interna.

La teoria, come essa è data dalla Lagrangiana (1), è a questo punto inconsistente per la anomalia della corrente assiale³⁷. La presenza del grafico triangolare della fig.1 entra, come è noto, in contrasto con la conservazione della corrente assiale, che è una conseguenza delle equazioni del moto relative alla (1). Infatti per la antisimmetria del tensore del campo assiale A_μ si ha :

$$\partial_\mu \partial_\nu F_A^{\mu\nu} = g_A \partial_\mu j_A^\mu = 0$$

dove $j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$.

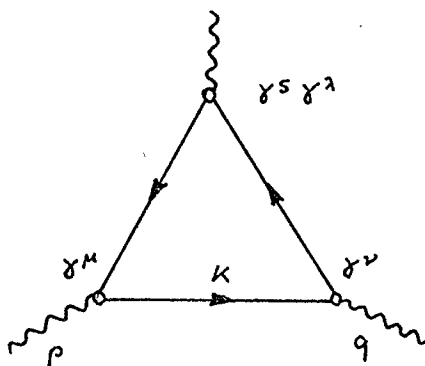


fig.1 Triangolo fermionico con anomalia assiale .

La rimozione della anomalia verrà discussa nel paragrafo 3) del presente capitolo e non invaliderà le conclusioni precedentemente tratte sul meccanismo di rottura spontanea della simmetria. In questi modelli si suppone infatti che essa avvenga attraverso bosoni di Goldstone rappresentati da stati legati piuttosto che attraverso la anomalia della corrente assiale come nell'elettrodinamica di Schwinger in due dimensioni.²⁰

Una caratteristica rimarchevole della Lagrangiana (1) è inoltre l'invarianza di scala. Infatti in essa non compare nessuna massa e quindi nessuna lunghezza fondamentale.

Nel seguito ^{si}ricercheranno soluzioni non-perturbative della (1) che rompano la simmetria chirale e diano luogo a generazione di massa. Infatti è noto che la teoria delle perturbazioni ordinaria non può mostrare uno stato legato (il bosone di Goldstone) e ad ogni ordine finito in g_A compaiono solo fermioni a massa zero e bosoni di gauge.

1) Generazione spontanea della massa

Per la simmetria presente nella Lagrangiana la funzione di vertice assiale soddisfa all'identità di Ward-Takahashi (v. Appendice A) :

$$q_\mu \Gamma_S^\mu(p, p+q) = i \gamma^5 S_F^{-1}(p+q) + i S_F^{-1}(p) \gamma^5 \quad (2)$$

(per il problema delle anomalie triangolari si veda il paragrafo 3)).

Assumiamo che l'equazione di Dyson per l'operatore di massa fermionico $\Sigma(p)$ ammetta una soluzione che rompe la simmetria :

$$\{ \gamma^5, \Sigma(p) \} \neq 0 \quad (3)$$

Questa ipotesi è equivalente alla affermazione che il vuoto (fisico) $|0\rangle$ non è invariante per la trasformazione generata dalla carica chirale χ .

Infatti chiamiamo $U(\theta)$ l'operatore unitario che implementa la simmetria chirale della Lagrangiana (1) :

$$\psi(x) \xrightarrow{x} U^\dagger(\theta) \psi(x) U(\theta) = e^{i\gamma^5 \theta} \psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{x} U^\dagger(\theta) \bar{\psi}(x) U(\theta) = \bar{\psi}(x) e^{i\gamma^5 \theta}$$

dove $U(\theta) = \exp i\chi\theta$ e $\chi = g_A \int d_3 \vec{x} \bar{\psi}(x) \gamma^0 \gamma^5 \psi$.

Per il propagatore fermionico $S_F(p)$ vale allora in ogni caso :

$$\begin{aligned} S_F(p) &= \int d^4 x e^{ipx} \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle \\ &\equiv \int d^4 x e^{ipx} \langle 0 | T U U^{-1} \psi(x) U U^{-1} \bar{\psi}(0) U U^{-1} | 0 \rangle \\ &= \int d^4 x e^{ipx} \langle 0 | U T e^{i\gamma^5 \theta} \psi(x) \bar{\psi}(0) e^{i\gamma^5 \theta} U^{-1} | 0 \rangle \end{aligned}$$

Se ora il vuoto è invariante per U si ha : $U(\theta) | 0 \rangle = | 0 \rangle$

e quindi

$$S_F(p) = e^{i\gamma^5 \theta} S_F(p) e^{i\gamma^5 \theta}$$

e quindi anche

$$e^{-i\gamma^5 \theta} S_F^{-1}(p) e^{-i\gamma^5 \theta} = S_F^{-1}(p)$$

Per trasformazioni infinitesime si ha :

$$(1 - i\gamma^5 \theta) S_F^{-1}(p) (1 - i\gamma^5 \theta) \cong S_F^{-1}(p) - i\theta \{ \gamma^5, S_F^{-1}(p) \}$$

In generale si ha $i S_F(p) = p - \Sigma(p)$ e quindi deve essere :

$$\{ \gamma^5, S_F^{-1}(p) \} = i \{ \gamma^5, \Sigma(p) \} = 0$$

Quindi se $\{ \gamma^5, S_F^{-1}(p) \} \neq 0$, necessariamente il vuoto non può essere invariante sotto le trasformazioni chirali generate da χ .

La circostanza (3), come si vedrà, induce un polo nella funzione di vertice $\Gamma_5^{\mu}(p', p)$ a zero momento trasferito, che indica la presenza di uno stato legato fermionico. Questo polo a sua volta genera un altro polo nel tensore di polarizzazione proprio :

$$\Pi_A^{\mu\nu}(q) \equiv -g_A^2 \int d^4 x e^{iqx} \langle 0 | T j_A^\mu(x) j_A^\nu(0) | 0 \rangle = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_A(q^2)$$

$$\text{con } \Pi_A(q^2) \sim \frac{1}{q^2} \text{ per } q^2 \rightarrow 0 \quad (4)$$

per cui il bosone vettore acquista massa (secondo il meccanismo di Schwinger). Per il propagatore assiale nel gauge di Landau si ha

quindi :

$$D_A^{\mu\nu}(q) = -i \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{1}{q^2 - q^2 \Pi_A(q^2)}$$

con $q^2 \Pi_A(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} M^2$

23,24

Esaminiamo ora più in dettaglio questi concetti

L'equazione di Dyson per il propagatore fermionico $S_F(p)$ è data da :

$$S_F(p) = -i [\not{p} - \Sigma(\not{p})]$$

$$\Sigma(\not{p}) = \text{Tr} \int d^4k S_F(k) \delta^4 \delta^5 \left[g_A^2 D_A^{\mu\nu}(p-k) \Gamma_A^\nu(p,k) + g_V^2 D_V^{\mu\nu}(p-k) \Gamma_V^\nu(p,k) \right] \quad (5)$$

Diagrammaticamente :

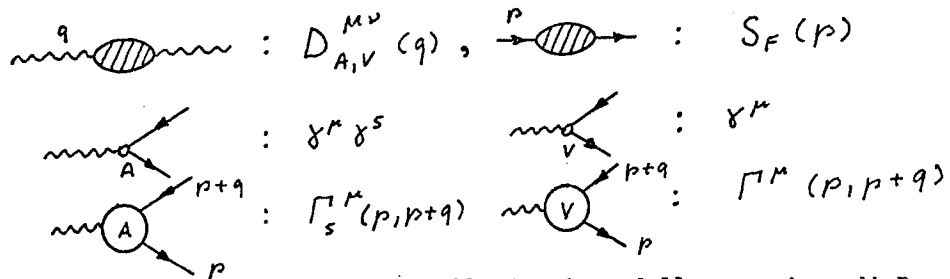
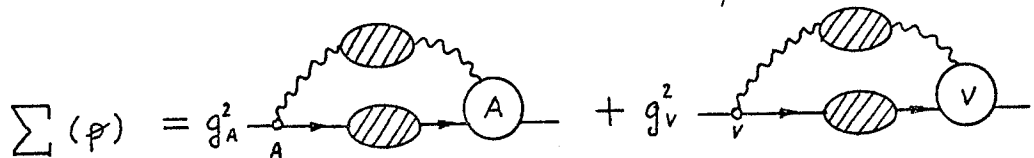


fig.2 Ad illustrazione della equazione di Dyson per la inserzione di autoenergia fermionica .

Si assumo ora, come si è detto, che sia $\{\delta^5, \Sigma(\not{p})\} \neq 0$.

Per Lorentz-invarianza l'inserzione di autoenergia fermionica può venire decomposta in :

$$\Sigma(\not{p}) = \not{p} A(p^2) + m B(p^2)$$

e quindi si ha per zero momento trasferito la identità :

$$\lim_{q \rightarrow 0} q_\mu \Gamma_s^\mu(p, p+q) = 2m \delta^5 B(p^2) \quad (6)$$

Per Lorentz-invarianza $\Gamma_s^\mu(p, p+q)$ è a sua volta della forma :

$$\Gamma_s^\mu(p, p+q) = q^\mu \Gamma_1 + p^\mu \Gamma_2 + \delta^\mu \Gamma_3$$

dove le funzioni Γ_i dipendono dagli invarianti p^2 , q^2 e $p \cdot q$ e possono contenere γ^5 . Applicando q_μ si ottiene quindi :

$$q_\mu \Gamma_5^\mu(p, p+q) = q^2 \Gamma_1 + p \cdot q \Gamma_2 + q \Gamma_3$$

Per $q \rightarrow 0$ che tende a zero la parte destra di questa uguaglianza deve ammettere un limite finito, per la ipotesi (3) che si è fatta sopra. Scartando per ragioni fisiche un polo del tipo $\frac{1}{p \cdot q}$ al quale non corrisponderebbe un propagatore di uno stato legato intermedio bosonico, si assume consistentemente che si abbia per $q \rightarrow 0$:

$$\Gamma_1(p^2, q^2, p \cdot q) = \frac{1}{q^2} F(p^2, q^2, p \cdot q)$$

dove F è una funzione regolare per $q \rightarrow 0$, e che le altre funzioni Γ_1 e Γ_2 siano viceversa regolari per $q \rightarrow 0$. In conclusione :

$$\Gamma_5^\mu(p, p+q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{q^\mu}{q^2} F(p^2, 0, 0)$$

con $F(p^2, 0, 0) = 2m\gamma^5 B(p^2)$.

Queste osservazioni non escludono naturalmente che per ottenere consistenza $F(p, q)$ debba essere della forma :

$$F(p^2, q^2, p \cdot q) \underset{q \rightarrow 0}{\sim} F_0(p^2, 0, 0) + q \cdot p F'(p^2, 0, 0)$$

dove il primo termine è preponderante sul secondo nell'intorno della singolarità della funzione di vertice ($q \rightarrow 0$).

Si può mostrare costruendola che una soluzione di questo tipo esiste all'ordine più basso in g_A . (v. paragrafo 6).

Il vertice vettoriale $\Gamma_V^\mu(p, p+q)$ è regolare per $q \rightarrow 0$ come si vede dalla identità di Ward :

$$q_\mu \Gamma_V^\mu(p, p+q) = i S_F^{-1}(p) - i S_F^{-1}(p+q) \quad (7)$$

$\xrightarrow{q \rightarrow 0} 0$

Introducendo la ampiezza di diffusione propria irriducibile ad 1 particella nel canale fermione-antifermione T' , si ha la relazione con l'ampiezza di diffusione connessa totale, T :

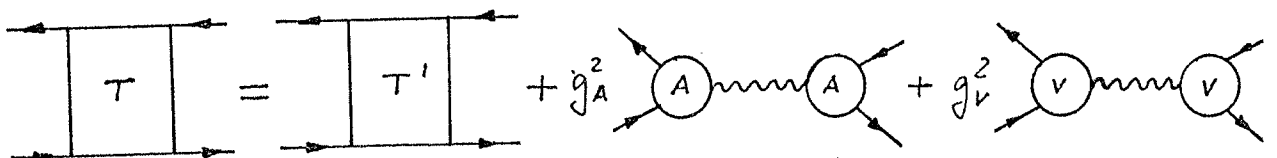


fig.3 Decomposizione della ampiezza di diffusione totale.

e per la funzione di vertice assiale l'identità :

Diagram (8) shows a vertex labeled 'A' with an incoming wavy line and two outgoing lines labeled 'p+q' and 'p'. This is equal to the sum of two terms: first, a vertex with an incoming wavy line and two outgoing lines labeled 'p+q' and 'p'; second, a diagram where an incoming wavy line enters a box labeled 'T'' from the left, and two outgoing lines labeled 'p+q' and 'p' exit from the right. The box 'T'' contains two shaded regions representing a nucleus.

fig.4 Il vertice assiale completo espresso in funzione del nucleo T' essendo la funzione di vertice irriducibile per un mesone vettore per definizione.

La presenza del polo in $\Gamma_S^{\mu}(p,p+q)$ va attribuita ad un polo

in T' :

Diagram (9) shows a box labeled 'T'' with two horizontal lines entering from the left and two exiting to the right. This is equal to the sum of two terms: first, a diagram with two vertices labeled 'P' connected by a dashed line, with two incoming lines on the left and two outgoing lines on the right; second, a box labeled 'R' with two horizontal lines entering from the left and two exiting to the right.

fig.5 Comparsa della eccitazione pseudoscalare in T' .

dove il vertice fermione-antifermione-bosone di Goldstone è da determinarsi, $---- = \frac{i}{q^2}$ e R è regolare per $q^2 \rightarrow 0$. $P(p,p')$ descrive l'accoppiamento dello stato legato fermionico (bosone di Goldstone) con i campi fermionici.

Inserendo la equazione (9) nella (8) e trattenendo solo i termini singolari per $q^2 \rightarrow 0$ si ha :

Diagram (6) shows the vertex 'A' with an arrow pointing to a more complex diagram. The arrow is labeled with $q^2 \rightarrow 0$. The resulting diagram shows a wavy line entering a vertex, which then connects to a loop of two shaded regions (representing a nucleus) and a dashed line connecting two 'P' vertices, with two outgoing lines.

fig.6 La funzione di vertice assiale in prossimità del polo .

cioè :

$$\Gamma_S^{\mu}(p,p+q)|_{\text{polo}} = \left[T_2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} S_F(z) \gamma^{\mu} \gamma^5 S_F(z+q) P(z+q, z) \right] \frac{i}{q^2} P(p,p+q)$$

Per invarianza Lorentziana l'integrale tra parentesi è proporzionale a q_{μ} :

$$q_{\mu} I(q^2) = T_2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} S_F(z) \gamma^{\mu} \gamma^5 S_F(z+q) P(z+q, z)$$

$$I(0) =: \lambda \tag{10}$$

cosicchè :

$$\Gamma_S^{\mu}(p,p+q)|_{\text{polo}} = i \frac{q_{\mu}}{q^2} \lambda P(p,p+q) \tag{11}$$

per cui dalla (7) si ottiene :

$$F(p) \equiv - \{ \gamma^5, \Sigma(p) \} = i \lambda P(p, p) \quad (12)$$

ed essendo $F(p) \propto \gamma^5$ si ha che $P(p, p)$ è un vertice pseudoscalare, e quindi anche la eccitazione a massa zero deve essere pseudoscalare.

La equazione di Dyson per il tensore di polarizzazione assiale è illustrata dalla fig.7.

$$\Pi_A^{\mu\nu}(q) = g_A^2 \text{ [diagramma] }$$

fig.7 La equazione di Dyson per la parte propria del tensore di polarizzazione assiale .

Essendo $\Gamma_S^{\mu\nu}(p, p+q)$ singolare per $q^2 \rightarrow 0$, anche $\Pi_A^{\mu\nu}(q)$ sviluppa lo stesso polo. Inserendo il contributo singolare della funzione di vertice assiale nella equazione di Dyson si ha :

$$\Pi_A^{\mu\nu}(q)_{\text{polo}} \cong g_A^2 \text{ [diagramma] }$$

fig.8 Espressione per il tensore di polarizzazione in prossimità del polo .
cioè :

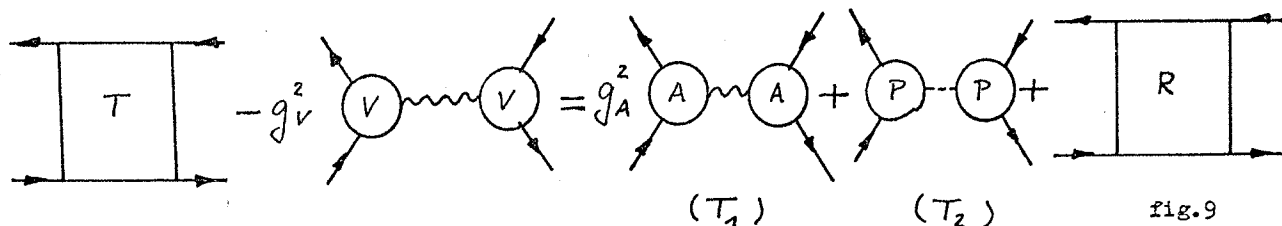
$$\begin{aligned} \Pi_A^{\mu\nu}(q)_{\text{polo}} &= g_A^2 (-q^\mu I(q^2)) \frac{i}{q^2} (+q^\nu I(q^2)) \\ &= -i g_A^2 \lambda^2 \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \end{aligned} \quad (13)$$

per cui $q^2 \Pi_A(q^2) \cong g_A^2 \lambda^2 \equiv M^2$ nella approssimazione $D_{\mu\nu}^{-1}(0) = M^2$.
Nel paragrafo 4) si deriverà una regola di somma per $g_A^2 \lambda^2$.
Inoltre nei paragrafi 5) e 6) si ricaverà con la equazione di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala una prima espressione per λ .

2) Disaccoppiamento della eccitazione a massa zero

Mostreremo che T non contiene poli per $q^2 \rightarrow 0$ eccetto il polo dovuto al mesone vettoriale V_μ che resta a massa zero per l'identità di Ward (7).

I momenti esterni si intendono posti sul "mass shell". Per semplicità verranno omissi nel seguito gli spinori entranti ed uscenti. Dalle fig. 3 e 5 si ha :



Ora però la funzione di vertice assiale si può scrivere come :

$$\Gamma_S^r(p, p+q) = \tilde{\Gamma}_S^r(p, p+q) + i \frac{g^r}{q^2} \lambda P(p, p+q) \quad (14)$$

dove $\tilde{\Gamma}_S^r$ è regolare per $q^2 \rightarrow 0$, e inoltre si ha per esempio :

$$\bar{u}(p) g_r \Gamma_S^r(p, p+q) u(p+q) = \bar{u}(p) [i \delta^5 S_F^{-1}(p+q) + i S_F^{-1}(p) \gamma^5] u(p+q) = 0$$

valendo per gli spinori "fisici" la relazione :

$$S_F^{-1}(p) u(p) = \bar{u}(p) S_F^{-1}(p) = 0$$

Considerando le due componenti di T , T_1 e T_2 , singolari per $q^2 \rightarrow 0$ (dimenticando il mesone vettore V_μ) si ha che :

$$\langle p'+q, p' | T_2 | p+q, p \rangle = P(p'+q, p') \frac{i}{q^2} P(p, p+q)$$

e per T_1 :

$$\begin{aligned} \langle p'+q, p' | T_1 | p+q, p \rangle &= g_A^2 \Gamma_S^r(p'+q, p') \frac{-i(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2})}{q^2 - q^2 \Pi_A(q^2)} \Gamma_S^\nu(p, p+q) \\ &\cong_{q^2 \rightarrow 0} g_A^2 \Gamma_S^r(p'+q, p') \frac{-i g_{\mu\nu}}{-M^2} \Gamma_S^\nu(p, p+q) \end{aligned}$$

(peraltro indipendentemente dal gauge, cioè da termini $\propto q_\mu q_\nu / q^2$ nel propagatore bosonico $D_{A\mu\nu}(q)$).

Ma dalla equazione (14) si ha (La differenza di segno nelle due equazioni è dovuta al fatto che in un caso il momento q entra nel vertice P e nell'altro caso ne esce):

$$\Gamma_S^r(p'+q, p') = \tilde{\Gamma}_S^r(p'+q, p') - i \frac{q^r}{q^2} \lambda P(p'+q, p') \quad (15)$$

e quindi la espressione precedente per T_1 si può riscrivere come :

$$\begin{aligned} \langle p'+q, p' | T_1 | p+q, p \rangle &= g_A^2 \left[\tilde{\Gamma}_5^\mu(p'+q, p') \frac{i g_{\mu\nu}}{M^2} \tilde{\Gamma}_5^\nu(p, p+q) \right. \\ &\quad - i \frac{q^\mu}{q^2} \lambda P(p'+q, p') \frac{i g_{\mu\nu}}{M^2} \tilde{\Gamma}_5^\nu(p, p+q) \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_5^\mu(p'+q, p') \frac{i g_{\mu\nu}}{M^2} \frac{i q^\nu}{q^2} \lambda P(p, p+q) \\ &\quad \left. - i \frac{q^\mu}{q^2} \lambda P(p'+q, p') \frac{i g_{\mu\nu}}{M^2} \frac{i q^\nu}{q^2} \lambda P(p, p+q) \right] \end{aligned}$$

Gli ultimi tre termini sono singolari per $q^2 \rightarrow 0$. Usando le relazioni (che si ottengono da quelle scritte sopra) :

$$q_\mu \tilde{\Gamma}_5^\mu(p, p+q) = q_\mu \Gamma_5^\mu(p, p+q) - i \lambda P(p, p+q)$$

$$q_\mu \tilde{\Gamma}_5^\mu(p'+q, p') = q_\mu \Gamma_5^\mu(p'+q, p') + i \lambda P(p'+q, p')$$

si ha che i primi termini al secondo membro non danno contributo quando le particelle esterne sono nel mass-shell e quindi :

$$\begin{aligned} \langle p'+q, p' | T_1 | p+q, p \rangle &= g_A^2 \left[\tilde{\Gamma}_5^\mu(p'+q, p') \frac{i}{M^2} \tilde{\Gamma}_5^\mu(p, p+q) \right. \\ &\quad - \lambda P(p'+q, p') \frac{i}{M^2 q^2} \lambda P(p, p+q) \\ &\quad - \lambda P(p'+q, p') \frac{i}{M^2 q^2} \lambda P(p, p+q) \\ &\quad \left. + \lambda P(p'+q, p') \frac{i}{M^2 q^2} \lambda P(p, p+q) \right] \\ &= \text{Reg.} - P(p'+q, p') \frac{i}{q^2} P(p, p+q) \\ &= - \langle p'+q, p' | T_2 | p+q, p \rangle \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto che $g_A^2 \lambda^2 = M^2$.

Questa eguaglianza può venire espressa diagrammaticamente come :

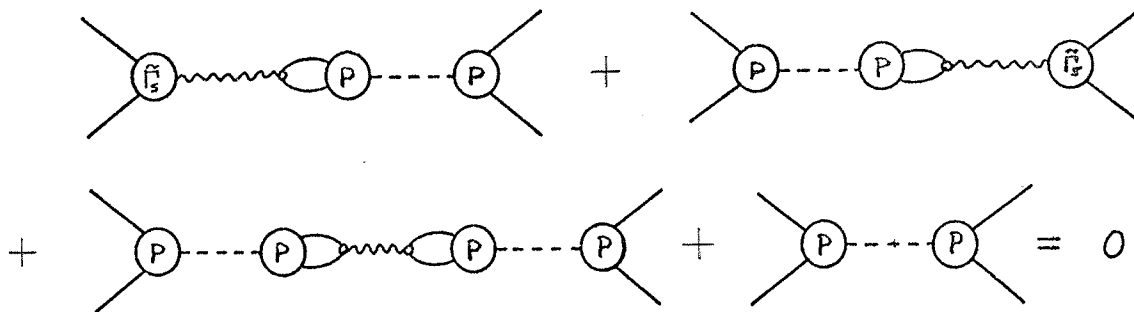


fig.10 Cancellazione del polo a massa zero nella ampiezza di diffusione fermionica .

3) La anomalia triangolare

La teoria sviluppata a partire dalla Lagrangiana (1) è inconsistente per la presenza della anomalia triangolare ³⁷. Questa può venire rimossa introducendo nuovi fermioni ^{38,39} accoppiati al campo assiale da :

$$\mathcal{L}_I^A(x) = g_A \bar{\Psi} \gamma^\mu \Gamma \Psi A_\mu, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (16)$$

con la condizione sulla matrice hermitiana ³⁹ Γ :

$$T_2 \gamma^5 \Gamma \{ \Gamma, \Gamma \} = 0$$

che garantisce l'annullarsi dei grafici triangolari.

Nel caso più semplice $\Gamma =: \tau_3$ e $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$.

La nuova Lagrangiana con la corrente assiale data dalla (16) presenta nuove simmetrie :

oltre a : (a) $\delta \Psi = i \theta_1 \Psi$ e (b) $\delta \Psi = i \theta_2 \gamma^5 \Psi$

anche : (c) $\delta \Psi = i \theta_3 \tau_3 \Psi$ e (d) $\delta \Psi = i \theta_4 \tau_3 \gamma^5 \Psi$

Le nuove simmetrie continue (a) e (c) non devono venire spontaneamente rotte pena la apparizione di nuovi bosoni di Goldstone che non si disaccoppiano dalla teoria (infatti il bosone di Goldstone deve rimanere unico se c'è un solo campo pseudovettoriale). Tuttavia anche in presenza di masse differenti per ogni fermione esse non vengono rotte.

Inoltre la corrente $j_s^\mu = \psi \gamma^\mu \gamma^5 \psi$, nonostante resti afflitta dalla anomalia triangolare può dare luogo a bosoni di Nambu-Goldstone in quanto è stato mostrato che l'anomalia nella identità di Ward per questa corrente non contribuisce a zero momento trasferito. L'unica via di uscita da questa situazione appare quella in cui la conservazione della corrente j_s^μ è rotta dinamicamente e non-perturbativamente (a differenza dell'azione dell'anomalia triangolare) come in elettrodinamica scalare assiale (si veda la ref. 32 e le referenze ivi citate). In questa elettrodinamica la corrente assiale è formalmente conservata, e tuttavia le equazioni (ottenute non perturbativamente e con un metodo che richiede quindi una somma infinita di grafici) che determinano gli elementi di matrice della divergenza della corrente ammettono soluzioni non-solenoidali: $(p-p')_\mu \langle p' | j_s^\mu | p \rangle \neq 0$.

Inoltre la Lagrangiana (1) con il termine di interazione (16) ammette le seguenti simmetrie discrete:

$$(e) \quad \psi_1 \rightarrow \psi_2 \quad \psi_2 \rightarrow \psi_1 \quad A_\mu \rightarrow -A_\mu \quad V_\mu \rightarrow V_\mu$$

$$(f) \quad \psi_1 \rightarrow i\psi_2 \quad \psi_2 \rightarrow -i\psi_1 \quad A_\mu \rightarrow -A_\mu \quad V_\mu \rightarrow V_\mu$$

che implicano $S_{F_1}(p) = S_{F_2}(p)$ e $P_1(p',p) = -P_2(p',p)$. La rottura di queste simmetrie fa acquisire masse diverse ai due fermioni senza dare luogo a bosoni di Goldstone.

4) Regola di somma

Dal modello in esame si può derivare una regola di somma per la massa del mesone vettore assiale.²³ Questa è data, come si vedrà, da:

$$g_{\mu\nu} \lambda^2 g_A^2 = -i \tilde{\pi}_A^{\mu\nu}(0) \quad (17)$$

dove $\tilde{\pi}_A^{\mu\nu}(0)$ indica la parte regolare del tensore di polarizzazione assiale associato alla parte regolare (per $q^2 \rightarrow 0$) della funzione di vertice assiale, $\tilde{\Gamma}_s^{\mu\nu}(p, p')$, sopra introdotta; $\tilde{\pi}_A^{\mu\nu}(0)$ è una quantità finita.

Dalla definizione (10) si ha:

$$q^\mu I(q^2) = T_2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} S_F(z) \gamma^\mu \gamma^5 S_F(z+q) P(z+q, z)$$

Ora se $q \rightarrow -q$ e $r = r' + q$ si ha :

$$q^\mu I(q^2) = -T_2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} S_F(z'+q) \gamma^\mu \gamma^5 S_F(z') P(z', z'+q)$$

Derivando ambo i lati e ponendo poi $q = 0$ si ha :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial q_\nu} q^\mu I(q^2) \right]_{q=0} &\equiv g^{\mu\nu} \lambda \\ &= -T_2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \left\{ [\partial^\nu S_F(z)] \gamma^\mu \gamma^5 S_F(z) P(z, z) + S_F(z) \gamma^\mu \gamma^5 S_F(z) [\partial^\nu P(z, z)] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ove si intende

$$\partial^\nu P(z, z) = \left[\frac{\partial}{\partial q_\nu} P(z, z+q) \right]_{q=0}$$

inoltre dalla (15) si ha usando la identità di Ward per la corrente assiale :

$$q_\mu \tilde{\Gamma}_5^\mu(p, p+q) \equiv q_\mu \Gamma_5^\mu(p, p+q) - i I(q^2) P(p, p+q) \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \begin{cases} i \{ \gamma^5 S_F^{-1}(p) \} - \\ - i \lambda P(p, p) \end{cases}$$

che è uguale a zero perchè $\tilde{\Gamma}_5^\mu$ è regolare per $q \rightarrow 0$.

Quindi si ha (dalla (12)):

$$\lambda P(p, p) = \{ \gamma^5, S_F^{-1}(p) \}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} i \lambda \frac{\partial}{\partial q_\nu} P(p, p+q) \Big|_{q=0} &= i \gamma^5 \partial^\nu S_F^{-1}(p) - \delta_\mu^\nu \tilde{\Gamma}_5^\mu(p, p) \\ &\quad - [q_\mu \partial^\nu \tilde{\Gamma}_5^\mu(p, p+q)]_{q=0} \\ &= i \gamma^5 \partial^\nu S_F^{-1}(p) - \tilde{\Gamma}_5^\nu(p, p) \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nella (18) si ha (tenendo conto che

$$\partial^\nu S_F = -S_F \partial^\nu S_F^{-1} S_F \text{ e che } \gamma^5{}^2 = 1):$$

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 = -T_2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \left[S_F(z) \partial^\nu S_F^{-1}(z) S_F(z) \gamma^\mu - S_F(z) \gamma^\mu \gamma^5 S_F(z) \tilde{\Gamma}_5^\nu(z, z) \right]$$

Per la identità di Ward (7) per la corrente vettoriale si può porre :

$$\partial^\nu S_F^{-1}(z) = i \Gamma_V^\nu(z, z)$$

E si ottiene :

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 = i T_2 \int \frac{d^4 n}{(2\pi)^4} \left[S_F(n) \Gamma_V^{\mu\nu}(n, n) S_F(n) \delta^{\mu\nu} - S_F^{(2)} \tilde{\Gamma}_S^{\mu\nu}(n, n) S_F(n) \delta^{\mu\nu} \right] \quad (19)$$

Tenendo conto della forma della equazione di Dyson per il tensore di polarizzazione (fig.7) , si ha :

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 = - i T_2 \left[g_A^{-2} \tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(0) - g_V^{-2} \Pi_V^{\mu\nu}(0) \right].$$

$\Pi_V^{\mu\nu}(0)$ è una quantità quadraticamente divergente che contiene i termini "seagull", che cancella la divergenza quadratica analoga in $g_A^{-2} \tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(0)$. La presenza di questo termine è necessaria per rendere corretta l'equazione di Dyson in quanto le correnti nella (1) non erano ordinate normalmente. In conclusione si ha

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 g_A^2 = - i \tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(0)$$

ove ora $\tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(0)$ non contiene più i termini "seagull".

La regola di somma (17) diviene una formula per la massa del mesone vettore nella approssimazione (13): $g_A^2 \lambda^2 = M^2$.

La regola di somma (17) può venire anche compresa sulla base delle equazioni (4) e (13) per il tensore di polarizzazione :

$$\tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(q) = i (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \left(\tilde{\Pi}(q^2) + \frac{g_A^2 \lambda^2}{q^2} \right)$$

(con $\tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(q^2)$ regolare per $q^2 \rightarrow 0$) per il quale la parte regolare è data dall'espressione nontrasversa :

$$\tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(q) = i g_A^2 \lambda^2 g^{\mu\nu} + i g^{\mu\nu} q^2 \tilde{\Pi}(q^2) - q^\mu q^\nu \tilde{\Pi}(q^2)$$

e

$$\tilde{\Pi}_A^{\mu\nu}(0) = i g_A^2 \lambda^2 g^{\mu\nu}.$$

5) Calcolo approssimato di λ

Dalla (19) si può calcolare approssimativamente λ e quindi M secondo la (13).

La equazione (19) è :

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 = i T_2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} [S_F(r) \Gamma_V^\nu(r,r) S_F(r) \gamma^\mu - S_F(r) \tilde{\Gamma}_S^\nu S_F(r) \gamma^\mu \gamma^5]$$

Poniamo :

$$S_F(r) = i [\not{x} - \Sigma(r)]^{-1}, \quad \Gamma_V^\nu(r,r) = \gamma^\nu, \quad \tilde{\Gamma}_S^\nu(r,r) = \gamma^\nu \gamma^5$$

e $\Sigma(r) = \not{x} A(r^2) + m B(r^2)$ per invarianza Lorentziana.

$S_F(r)$ deve avere un polo in corrispondenza di $\not{x} = m$ e deve quindi valere :

$$\Sigma(x) \Big|_{x=m} = m, \quad \text{cioè} \quad A(m^2) + B(m^2) = 1$$

Assumiamo inoltre che l'inserzione di autoenergia $\Sigma(p)$ si annulli, a parte termini in \not{x} , per grandi p^2 :

$$-i \lambda P(r,r) = \{ \gamma^5, \Sigma(p) \} = 2 \gamma^5 B(p^2) \xrightarrow{p^2 \rightarrow \infty} 0$$

Se questo non accadesse, si entrerebbe in contrasto con l'affermazione che la massa meccanica m_0 è eguale a zero.

Inserendo le funzioni approssimate si ha :

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 = -i T_2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{1}{[r^2(1-A(r^2))^2 - m^2 B^2(r^2)]^2} \times \\ [(\not{x}(1-A) + mB) \gamma^\nu (\not{x}(1-A) + mB) \gamma^\mu - (\not{x}(1-A) + mB) \gamma^\nu \gamma^5 (\not{x}(1-A) + mB) \gamma^\mu \gamma^5]$$

ora : $\not{x} \gamma^\nu \not{x} \gamma^\mu = \not{x} \gamma^\nu \gamma^5 \not{x} \gamma^\mu \gamma^5$

$$T_2 \not{x} \gamma^\nu \not{x} \gamma^\mu = T_2 \not{x} \gamma^\nu \gamma^5 \not{x} \gamma^\mu \gamma^5 = 0$$

$$T_2 \not{x} \gamma^\nu \gamma^\mu = -T_2 \not{x} \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 = 4 g^{\mu\nu}$$

e ignorando nel denominatore $A(r^2)$ si ha :

$$g^{\mu\nu} \lambda^2 = -i 8 g^{\mu\nu} m^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{B^2(r^2)}{[r^2 - m^2 B^2(r^2)]^2}$$

e dalla (13) :

$$M^2 = -i 8 g_A^2 m^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{B^2(r^2)}{[r^2 - m^2 B^2(r^2)]^2} \quad (20)$$

Una espressione asintotica per $B(r^2)$ con $r^2 \rightarrow \infty$ verrà derivata

nel prossimo paragrafo.

6) Determinazione approssimata della parte asimmetrica dell'auto-energia fermionica. - Rottura dinamica della simmetria asintotica

Essendo $P(p, p)$ proporzionale a $\{\gamma^5, \Sigma(p)\}$ il calcolo di $P(p, p)$ equivale a determinare $B(p^2)$.

Si introduce il nucleo K di Bethe-Salpeter, che è dato dalla parte propria di \bar{K} (cioè irriducibile per un mesone vettore e non separabile in due parti disgiunte tagliando solo due linee fermioniche), che a sua volta è la funzione di Green a quattro punti senza i propagatori esterni e senza i due propagatori fermionici sconnessi nello stesso canale (v.fig.11).

Le equazioni integrali per la funzione di vertice espresse con il nucleo di Bethe-Salpeter K , sono date dalla fig. 12.

$$\text{funzione di Green} = S_F^a S_F^b - \int S_F^a S_F^b \bar{K} S_F^a S_F^b$$

e K parte propria di \bar{K} ;

Esempi di grafici non contenuti in K :



fig.II Esempi di grafici non contenuti in K .

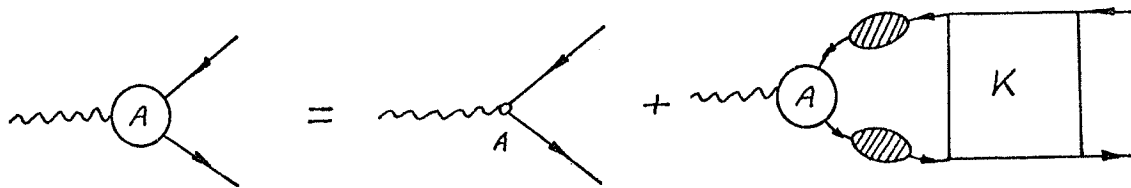


fig.I2 Equazione di Bethe-Salpeter per la funzione di vertice assiale .

(21)

Γ_S^M si decompone in parte regolare e parte singolare :

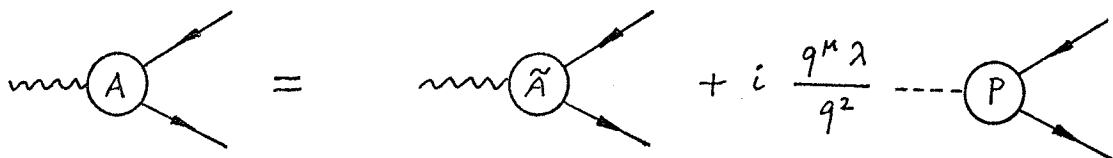


fig.I3 Parte singolare e parte regolare per $q^2 \rightarrow 0$ della funzione di vertice assiale . (22)

Sostituendo la (22) nella (21) si ottiene, eguagliando i contributi singolari per $q^2 \rightarrow 0$:

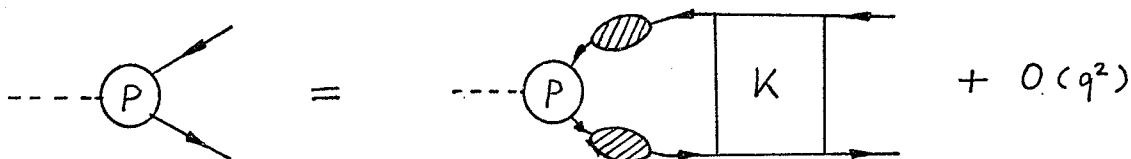


fig.I4 La parte singolare della funzione di vertice Γ_S^M in funzione del nucleo K .

che scritta esplicitamente è :

$$P_{ab}(p, p+q) = \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} S_{cd}^F(z) P_{de}(z, z+q) S_{ef}^F(z+q) K_{ac,fb}(p, z; q) \quad (23)$$

Scopo di questo paragrafo è di dimostrare che esiste una soluzione non triviale della (23).

In approssimazione a scala si pone :

$$K_{ac,fb}(p, z; q) = -g_A^2 (\gamma^\mu \gamma^5)_{fb} D_{\mu\nu}^A(p-z) (\gamma^\nu \gamma^5)_{ac} - g_V^2 \delta_{fb}^r D_{\mu\nu}^V(p-z) \delta_{ac}^v$$

dove $D_{\mu\nu}^A$ e $D_{\mu\nu}^V$ sono propagatori vestiti.

Lo schema di approssimazione usato consiste nel risolvere in approssimazione a scala le equazioni integrali della teoria all'ordine più basso nelle costanti di accoppiamento (g^2) usando l'espressione all'ordine zero per i propagatori, ma con già in essi inserite le quantità asimmetriche non-perturbative (masse fermioniche e masse bosoniche), che vengono trattati come oggetti di ordine g^0 (questo equivale a linearizzare la equazione integrale (23) in approssimazio

ne a scala). Inoltre l'uso dell'approssimazione a scala è consistente con le identità di Ward della teoria. Ulteriore investigazione richiede in questo approccio (come anche nella sua generalizzazione ai modelli non abeliani) la gauge-indipendenza dei risultati. Nel seguito sarà usato per semplicità il gauge di Landau.

I propagatori sono quindi dati da :

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - \Sigma(p)} \quad \Sigma(p) = \not{p} A(p^2) + m B(p^2)$$

$$D_{\mu\nu}^A(q) = -i \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 - q^2 \Pi_A(q^2) + i\epsilon} \quad D_{\mu\nu}^V(q) = -i \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2}{q^2 + q^2 \Pi_V(q^2) + i\epsilon}$$

Si pone ora $q^2 \Pi_A(q^2) = M^2$ e $q^2 \Pi_V(q^2) = 0$ e si ingorano, come nel paragrafo 5), i termini $A(p^2)$ nel denominatore.

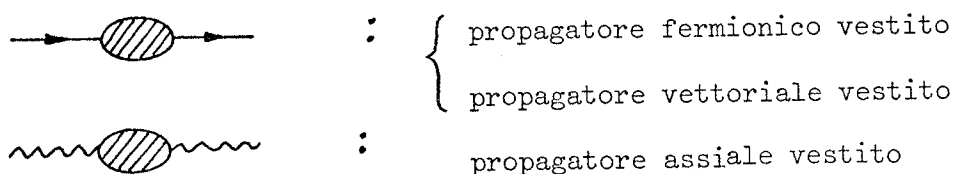
Dalla (23) si ottiene, posto $-i\lambda P(p,p) = 2m\delta^5 B(p^2)$ e tenendo conto che gli unici termini che non si elidono sono quelli proporzionali a $(z^2 - m^2 B^2(z^2)) \delta^5$ e che i termini con $g^{\mu\nu}$ danno un contributo 4 e quelli con $k^\mu k^\nu$ un contributo -1, si ha :

$$B(z^2) = -3i \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{B(z^2)}{z^2 - m^2 B^2(z^2)} \left[\frac{g_V^2}{(z-p)^2} - \frac{g_A^2}{(z-p)^2 - M^2} \right] \quad (24)$$

che può venire rappresentata (per la parte asimmetrica) diagrammaticamente da :

$$\Sigma(p) = \begin{array}{c} \text{diagramma 1} \\ \text{diagramma 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{diagramma 3} \\ \text{diagramma 4} \end{array}$$

g_A g_A g_V g_V



e rappresenta quindi una approssimazione di Hartree-Fock.

Se $g_A^2 \neq g_V^2$, le equazioni integrali (20) e (24) sono dominate

asintoticamente ed ha senso quindi ricercare una soluzione asintotica per $B(p^2)$. Per grandi p^2 (spacelike) la (24) diviene, ignorando il termine M^2 nel secondo denominatore, effettuando una rotazione di Wick ($\kappa_0 = -i\tau$) ed integrando sugli angoli : ($y = \frac{k^2}{p^2}$)

$$B\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \cong \frac{3}{16\pi^2} (g_v^2 - g_A^2) \int_0^\infty \frac{dy}{y} [\theta(1-y)y + \theta(y-1)] \frac{B\left(y \frac{p^2}{m^2}\right)}{1 + y \frac{E^2}{m^2} B\left(y \frac{p^2}{m^2}\right)} \quad (25)$$

Questa equazione può venire risolta approssimativamente linearizzandola. La approssimazione per $B(p^2)$ che si ottiene riproduce molto bene le caratteristiche qualitative salienti della soluzione esatta, come è stato mostrato da Englert et al.²⁸ convertendo la (25) in una equazione differenziale non lineare con le opportune condizioni al contorno e risolvendola con l'ausilio del calcolatore. La equazione linearizzata è :

$$B\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \cong \frac{3}{16\pi^2} (g_v^2 - g_A^2) \int_0^\infty \frac{dy}{y} [\theta(1-y)y + \theta(y-1)] B\left(y \frac{p^2}{m^2}\right) \quad (26)$$

che per grandi p^2 diviene ($y > 1$) :

$$B\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \underset{|p^2 \rightarrow \infty}{\cong} \frac{3}{16\pi^2} (g_v^2 - g_A^2) \int_1^\infty \frac{dy}{y} B\left(y \frac{p^2}{m^2}\right)$$

e ammette la soluzione asintotica : (C è una costante)

$$B\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \underset{|p^2| \rightarrow \infty}{\longrightarrow} m G \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\varepsilon} \quad (27)$$

dove le costanti di accoppiamento devono soddisfare alla seguente condizione :

$$\frac{G}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = 1 \quad ; \quad \varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad G =: \frac{3}{16\pi^2} (g_v^2 - g_A^2)$$

Assumendo che $B(p^2)$ sia finita per $p^2 \rightarrow 0$ e che decresca per grandi p^2 , si ha la soluzione $\varepsilon^- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4G})$ con il vincolo $0 < g_v^2 - g_A^2 < \frac{4\pi^2}{3}$. La soluzione $\varepsilon^+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4G})$ viene scartata perchè non è coerente con l'ipotesi che si è assunta linearizzando la equazione integrale (31), e che cioè l'integrale sia dominato dalla regione ultravioletta ($\varepsilon^+ \sim 1 + G$ per piccoli $G \Rightarrow B(p^2) \sim \frac{1}{p^2}$ per $p^2 \rightarrow 0$).

Dalla serie perturbativa rinormalizzata (f.17) si ottiene $C=1 + O(g_A^2, g_V^2)$.
 Da $\sum_{p^2=m^2}(\not{p})$ si ha per $A(p^2)=0$: $B(m^2)=1$, cioè $C \left(\frac{m^2}{m^2}\right)^{-\epsilon} \cong 1$ e
 quindi $C=1$.

Inserendo la forma asintotica (27) della parte asimmetrica dell'inserzione di autoenergia fermionica nella equazione (20) per M^2 e tenendo conto che vale la relazione :

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m^2)(q^2)^{2\epsilon}} = i \frac{1 - \epsilon}{\pi \sin(2\pi\epsilon) m^{4\epsilon}}$$

si ottiene nel limite di accoppiamento debole ($\epsilon \sim G$) e trascurando le variazioni di $B(q^2)$ nel denominatore :

$$M^2 = \frac{4}{3} m^2 \frac{1}{g_A^2/g_V^2 - 1} \quad (28)$$

Alla circostanza $g_A^2 \neq g_V^2$, in cui il meccanismo di generazione della massa ha una origine asintotica (ultravioletta) e in cui le equazioni integrali rilevanti sono dominate dai contributi asintotici, ci si riferirà in seguito come ad una situazione di rottura della simmetria originata nell'ultravioletto (asintotica), o di tipo A^{27,28}. Il caso $g_A^2 = g_V^2$, discusso più avanti, verrà denominato di tipo B.

Nella visione degli autori^{24,25} i risultati ottenuti nel limite di accoppiamento debole, cioè la espressione (27) per la parte asimmetrica di $\sum(\not{p})$ e la semplice formula (28) per le masse, devono costituire un naturale punto di partenza ("piattaforma") per calcolare $\sum(\not{p})$ e quindi $\frac{M}{m}$ ad ordini superiori in g_A^2 e g_V^2 . Concretamente questo calcolo si effettua inserendo la espressione (27) per $B(p^2)$ nella equazione (24) generando un contributo al 1° ordine in g_A^2, g_V^2 derivante da zone nonasintotiche del dominio di integrazione. L'implementazione di questo programma di sviluppo perturbativo in g_A^2, g_V^2 resta tuttavia condizionato dal non apparire di divergenze ultraviolette agli ordini superiori. (Si veda più avanti la discussione della rinormalizzazione).

In conclusione riveste interesse notare che una soluzione non banale della (24) ($g_A^2 \neq g_V^2$) con comportamento asintotico accettabile si ottiene solo se le costanti di accoppiamento soddisfano alla

diseguaglianza :

$$0 < g_v^2 - g_A^2 < \frac{4\pi^2}{3}$$

che mostra che una teoria con la sola corrente assiale è inconsistente, e che sono quindi necessari bosoni vettoriali per dare luogo a stati legati fermionici. Il fatto che l'interazione assiale ha tra fermione e antifermione ha carattere repulsivo, contrariamente a mesoni vettori che mediano invece una interazione attrattiva tra i mesimesimi, e che quindi ambedue sono necessarie per generare masse autoconsistenti in Lagrangiane minimali fu notato per la prima volta da Englert e Brout (1966).⁹

7) Rinormalizzazione

La teoria fin qui discussa fornisce un propagatore bosonico assiale della forma :

$$D_{\mu\nu}^A(q) = -i (g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2) \frac{1}{q^2 + q^2 \Pi(q^2) + i\varepsilon}$$

e il suo comportamento ultravioletto non è più divergente dal propagatore libero. La teoria appare quindi rinormalizzabile.

Non potendo disporre di uno sviluppo perturbativo, non è possibile usare l'usuale programma di rinormalizzazione. Un programma di questo tipo può tuttavia venire definito, almeno in maniera euristica^{23,29,30,31}, usando vertici nudi con costanti di accoppiamento rinormalizzante $g^i(\lambda)$, propagatori fermionici vestiti rinormalizzati, ed effettuando la sottrazione di vertice nella teoria simmetrica per $p^2 = -\lambda^2 < 0$ onde evitare divergenze infrarosse. La soluzione asimmetrica è poi caratterizzata da un $B^{(R)}(p^2)$ rinormalizzato non nullo, soluzione di una equazione integrale con nucleo rinormalizzato. (E' stato infatti mostrato²³ che la eq. (19) per $\lambda(\infty)$ è invariante per rinormalizzazione nonostante contenga divergenze sovrappoentesi.) Questa è data dalla equazione di Dyson o di Bethe-Salpeter rinorma -

lizzata per :

$$\lim_{q \rightarrow 0} q_\mu \Gamma_s^{\mu(R)}(p, p+q) = -2m \gamma^5 B^{(R)}(p)$$

Infatti, tenendo conto che; come si è visto :

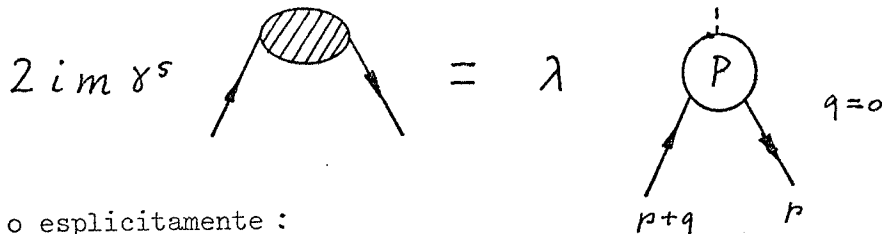


fig.15

o esplicitamente :

$$2m \gamma^5 B(p^2) = -i \lambda(0) P(p|p)$$

l'equazione integrale rinormalizzata è :

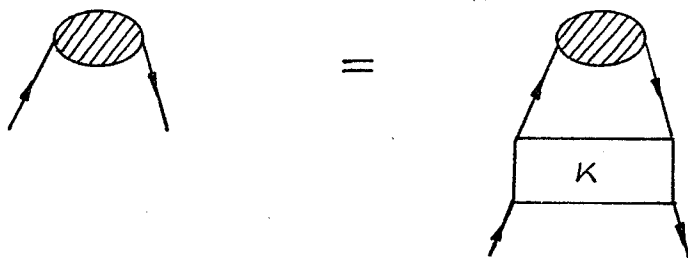
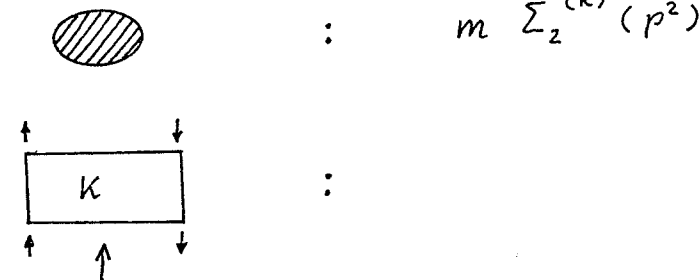


fig.16 Equazione di Bethe-Salpeter

ove :



La teoria è rinormalizzabile se e solo se esistono soluzioni finite per la equazione :

$$\Sigma(p) = \int d^4k K(p, k) \Sigma(k)$$

(Nel caso $\epsilon_A^2 \neq \epsilon_V^2$ questo avviene per esempio solo per accoppiamento debole)

In questo caso la soluzione ottenuta per $\Sigma(p)$ è consistente con le identità di Ward della teoria e non introduce quindi una ulteriore rottura della simmetria che sarebbe inconsistente con la gauge-invarianza. Gli unici controtermini necessari in questo caso sono quindi quelli della teoria simmetrica.

Il meccanismo di rottura spontanea della simmetria è valido solo

se sono soddisfatte due condizioni :

- 1) La identità di Ward per la corrente assiale è priva di anomalie
- 2) in $B^{(R)}(p^2)$ è finito

Il problema (1) è già stato in parte discusso precedentemente nel paragrafo c) di questo capitolo. La identità di Ward può non essere valida per due motivi :

- a) Anomalie Adler-Bell-Jackiw ³⁷. Queste vengono eliminate introducendo ulteriori fermioni.
- b) La ambiguità di Johnson-Pagels ^{35,36}

Dalla serie perturbativa rinormalizzata per $\Sigma(p)$:

$$\Sigma^{(R)}(p) = m + g_V^2 \text{diagram} + g_A^2 \text{diagram} - g_V^2 [\text{diagram}] - g_A^2 [\text{diagram}] + \dots$$

The diagrammatic equation shows the renormalized self-energy $\Sigma^{(R)}(p)$ as a sum of terms. The first term is the mass m . The second term is g_V^2 multiplied by a fermion loop with a shaded blob and a square vertex. The third term is g_A^2 multiplied by a similar loop with a different vertex. The fourth and fifth terms are g_V^2 and g_A^2 multiplied by the same loops enclosed in square brackets, indicating subtraction. The series continues with $+\dots$.

fig.17 Serie perturbativa rinormalizzata per la inserzione di autoenergia fermionica .

$\text{diagram} = \frac{i}{p-m}$; $[\]$: termini sottratti a $p^2 = m^2$, si può calcolare $m_0 = m - \Sigma(p)$, e si vede che $m_0 \neq 0$ per cutoff Λ finito.

Questo è sufficiente a prevenire l'apparire di un bosone di Nambu-Goldstone. Tuttavia se la teoria può venire formulata in maniera tale che solo il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ è richiesto, allora l'assunzione $m_0 = 0$ non genera inconsistenze ; $m_0 = 0$ è infatti l'unica assunzione compatibile con la conservazione della corrente assiale in presenza di una simmetria di gauge locale. Alcuni di questi problemi trovano una ambientazione più rigorosa nel metodo della regolarizzazione dimensionale, che, come è noto, è particolarmente adatto al caso delle teorie di gauge. ^{2,3}

8) Rottura dinamica della simmetria di tipo B

La situazione presenta profonde diversità rispetto al caso fin qui trattato se si assume $g_A^2 = g_V^2 = g^2$ nel modello abeliano^{27,28}. In questo evento la discussione precedente cade in difetto, e in approssimazione a scala non si ha più la soluzione asintotica (32) per $B(p^2)$. In questo caso la generazione della massa ha origine nella regione di piccoli momenti (regione infrarossa). Nel gauge di Landau, l'equazione integrale (24) per la parte asimmetrica della inserzione di autoenergia :

$$B(p^2) = -3i \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{B(z^2)}{z^2 - m^2 B(z^2)} \left[\frac{g_V^2}{(z-p)^4} - \frac{g_A^2}{(z-p)^2 - M^2} \right]$$

in questo caso diviene :

$$B(p^2) = 3i g^2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{M^2 B(z^2)}{[z^2 - m^2 B(z^2)](p-z)^2[(p-z)^2 - M^2]} \quad (29)$$

accoppiata ancora, come sopra, all'equazione approssimata :

$$M^2 = -8i g_A^2 \int \frac{d^4 z}{(2\pi)^4} \frac{m^2 B(z^2)}{[z^2 - m^2 B(z^2)]^2} \quad (20)$$

ove ancora si è fatta la ipotesi semplificatrice che la parte simmetrica $A(p^2)$ sia uguale a zero.

Come viene mostrato nella appendice C, $A(p^2)$ in approssimazione a scala soddisfa ad una equazione che può venire risolta iterativamente con tecniche usuali, e la soluzione è finita e non dipende criticamente dalla presenza del termine asimmetrico.

La equazione (29) nel caso $g_A^2 \neq g_V^2$ non fornisce, come si è visto precedentemente (par. 6) nessun vincolo per le costanti di accoppiamento eccetto che deve valere :

$$0 < G < \frac{1}{4} \quad G =: \frac{3}{16\pi^2} (g_V^2 - g_A^2) \quad (30)$$

Questo era dovuto sostanzialmente al fatto che il nucleo della

equazione linearizzata non era di Hilbert-Schmidt. (v.app. B).

La stessa circostanza avviene se si considera la equazione non lineare completa, risolta per mezzo di calcolatore.²⁸ La soluzione è ancora data da $B(p^2) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} C m (p^2/m^2)^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4G})}$ e si raccorda con continuità a $B(p^2) \propto m$ per piccoli p^2 per ogni valore di

G ($0 < G < \frac{1}{4}$). Questo è caratteristico della rottura spontanea della simmetria di tipo A. I fermioni acquistano massa indipendentemente dalle costanti di accoppiamento. Tuttavia è da notare che la (24) ammette una soluzione asimmetrica anche nel caso che $M^2 = 0$. (Questo avviene per una evasione anomala della identità di Ward, come notato da Johnson e Pagels^{35,36}).

La situazione si presenta drasticamente differente nel caso di rottura spontanea di tipo B ($g_A^2 = g_V^2$). In questo caso per via del fattore supplementare $\frac{1}{q^2}$ nel nucleo, l'integrale non è più asintoticamente dominato. Il nucleo si annulla rapidamente nel dominio asintotico dove era valida la (27), ed è conseguentemente di Hilbert-Schmidt. Una prima approssimazione la si ha con la sostituzione $B(p^2) \rightarrow B(0)$ nel denominatore. Si ottiene una equazione agli autovalori per g del tipo :

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 - 1 = \frac{3g^2}{16\pi^2} \log\left(\frac{m}{M}\right)^2 \quad (31)$$

Si noti ora la dipendenza nonanalitica di $\frac{m}{M}$ da g . *

La equazione esatta (29) può venire studiata su calcolatore dopo avere effettuato le integrazioni sugli angoli e introdotto parametri adimensionali. I risultati si possono così riassumere²⁸ :

- 1) $B(p^2) \sim \text{cost.} \cdot \frac{1}{p^4}$ per grandi $|p^2|$ e per ogni valore di g (in contrasto alla lenta decrescita, dipendente da G , nel caso di rottura della simmetria di tipo A);
- 2) dalla espressione (20) per M^2 si ottiene con il calcolatore $g^2/4\pi \cong 5.61$ e quindi $B(0)/M \cong 0.88$ e quindi solo una soluzione con accoppiamento intenso è possibile in approssimazione a scala. (Questo fatto rende discutibili molte approssimazioni fatte precedentemente.)

E' stato mostrato che il meccanismo di tipo B persiste anche nella

$$\text{per } \frac{m}{M} \ll 1 \quad \frac{m}{M} \approx e^{-\frac{8\pi^2}{3g^2}} \quad g^2 \sim 6$$

teoria completa e che difficilmente g può essere ridotto. g è tuttavia una quantità dipendente dal modello già in approssimazione a scala. Non è da scartare la possibilità che con più fermioni g possa decrescere^{30,31}. Si ritornerà su questo punto nella discussione dei modelli con gruppo di simmetria di gauge non abeliano.

Nel caso di rottura dinamica della simmetria di tipo B non è presente l'ambiguità di Johnson-Pagels. Infatti m_0 non dipende più da Λ nello sviluppo della fig.17.

Esistono delle argomentazioni di teoria dei gruppi che permettono di spiegare la peculiarità della condizione $g_A^2 = g_V^2 = g^2$ ³¹. La parte di interazione nella Lagrangiana (1) è data da :

$$\mathcal{L}_I(x) = g_A \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi A_\mu + g_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi V_\mu$$

che si può scrivere introducendo $X_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_\mu + A_\mu)$ e

$$Y_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_\mu - A_\mu) \quad \text{come :}$$

$$\mathcal{L}_I(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5) \psi Y_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V + g_A \gamma^5) \psi X_\mu$$

Nel caso di $g_V = \pm g_A$ X_μ e Y_μ si accoppiano a spinori di chiralità definita e il gruppo diviene $U(1) \otimes U(1)$ chirale (con una sola costante di accoppiamento, g , perchè la Lagrangiana (1) conserva la parità). Chiameremo gli spinori chirali dei due tipi genericamente u e v ($g_A = g_V \Rightarrow R = u$ e $L = v$; $g_A = -g_V \Rightarrow R = v$ e $L = u$; u si accoppia a X_μ e v a Y_μ).

Come conseguenza di questa situazione, grafici del tipo :

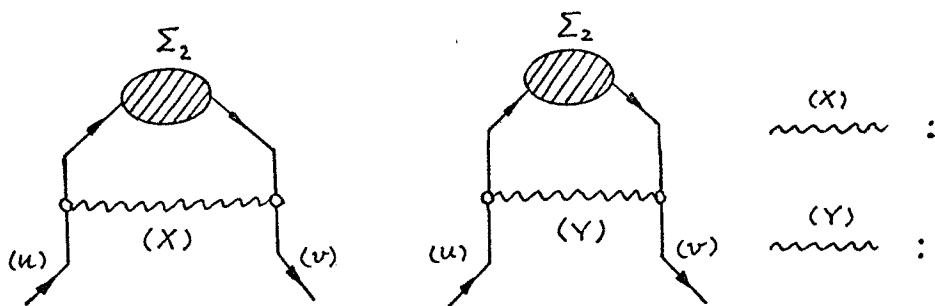


fig.18 Grafici che non danno contributo nella equazione di Bethe-Salpeter per $B(p')$ nel caso $g_A^2 = g_V^2$. per il calcolo della inserzione di autoenergia fermionica nella equazione integrale (26) linearizzata danno individualmente contri

buti nulli, e i primi grafici che forniscono un contributo non nullo sono :

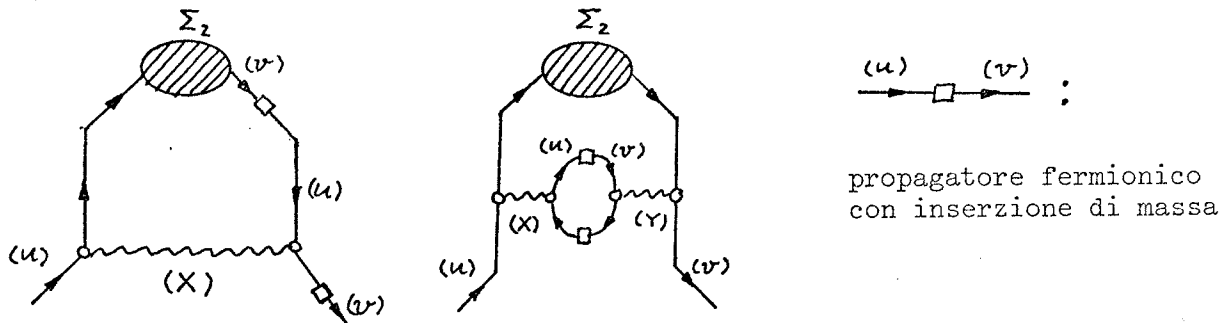


fig.19 I primi grafici che danno un contributo non nullo per il calcolo di $B(p^2)$.

In questo modo la convergenza del nucleo è aumentata nel secondo caso nella regione ultravioletta di un fattore $\frac{1}{k^2}$ rispetto al caso in cui $g_A^2 \neq g_V^2$ (Questo non accade per esempio nel caso del modello di Weinberg-Salam dove esiste una comunicazione tra spinori L e R data dal campo B_μ) Questa maggiore convergenza è in generale sufficiente a garantire la esistenza di un nucleo rinormalizzato limitato e a rendere la teoria rinormalizzabile. La stessa situazione si presenta, come si vedrà più avanti, nel caso di gruppi chirali non abeliani. (cap.IV)

E' notevole che nel caso di $g_A^2 = g_V^2$ la massa, come si vede confrontando i grafici (a) e (b), viene generata solo se avviene la comunicazione tra spinori di chiralità opposta indotta dalla massa fermionica stessa (meccanismo di "bootstrap"). Questa intrinseca non-linearità è responsabile delle aumentate proprietà di convergenza del modello.

9) Costruzione della Lagrangiana fenomenologica equivalente

Uno dei difetti principali della teoria finora trattata è che non si è trovato nessun metodo efficace di calcolo. La usuale teoria perturbativa non mostrerà mai uno stato legato, ed ad ogni ordine finito in g si avranno fermioni e bosoni vettori a massa zero.

Tuttavia è già stato precedentemente messo in luce il buon comportamento ultravioletto del propagatore assiale che alimenta la speranza di potere costruire una teoria rinormalizzabile.

Una via di uscita, anche se parziale, da questa situazione può venire indicata nella costruzione di una Lagrangiana fenomenologica, in cui le particelle composte siano rappresentate da operatori di campo locali, sulla quale riporre la speranza di una descrizione efficace, almeno nella regione di basse energie, e che compendi naturalmente gli aspetti più importanti della teoria fondamentale.²³

La descrizione data dalla Lagrangiana efficace si richiede che debba riprodurre almeno le seguenti caratteristiche della teoria fondamentale :

- 1) Lo spettro di eccitazione
- 2) Gli accoppiamenti tra gli stati
- 3) Le simmetrie del modello

Esaminiamo queste richieste individualmente per il modello (1) precedentemente trattato.

Nel modello abeliano lo spettro di eccitazione consiste di un fermione massiccio (dimenticando la anomalia assiale), un bosone vettore a massa zero, un bosone assiale massiccio ed una particella pseudoscalare, che tuttavia si disaccoppia dalla teoria.

Sono possibili, almeno a priori, anche stati legati massicci scalari e vettoriali (come nel modello di Nambu), ma si ritiene che questi stati siano ignorabili nella regione di basse energie.

Le interazioni presenti nella teoria coinvolgono vertici a due fermioni-bosone vettore (assiale o vettoriale) e vertici a due fermioni-mesone pseudoscalare e bosone vettore assiale-mesone pseudoscalare. Gli ultimi due vertici possono tuttavia venire rimossi tramite una appropriata ridefinizione dei campi.

Inoltre le simmetrie che si richiede vengano mantenute sono la conservazione della corrente assiale e vettoriale, e la conservazione delle parità.

Da questi presupposti si è portati a scrivere ($i = A, V$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\pi) = & i \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} \partial \phi \cdot \partial \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} \mu^2 A^2 + g_A \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi A_\mu + g_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi V_\mu \\ & - \bar{\psi} \psi S(\phi) + \bar{\psi} \gamma^5 \psi P(\phi) - 2g_A A_\mu \partial^\mu \phi a(\phi) \\ & + b(\phi) . \end{aligned}$$

Si tratta ora di determinare le quattro funzioni reali $S(\phi)$, $P(\phi)$, $a(\phi)$ e $b(\phi)$

Le equazioni del moto sono : $(\partial_2 = +\square)$

$$(a) \quad i \gamma \cdot \partial \psi = -g_A \gamma^\mu \gamma^5 \psi A_\mu - g_V \gamma^\mu \psi V_\mu + \psi S(\phi) + \gamma^5 \psi P(\phi)$$

$$(b) \quad \square \phi = 2g_A [\partial_\mu A^\mu a(\phi) + A_\mu \partial^\mu a(\phi)] - \bar{\psi} \psi S'(\phi) + \bar{\psi} \gamma^5 \psi P'(\phi) + b'(\phi)$$

$$(c) \quad \partial_\mu F_A^{\mu\nu} = -g_A \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^5 \psi - \mu^2 A^\nu + 2g_A \partial^\nu \phi a(\phi)$$

$$(d) \quad \partial_\mu F_V^{\mu\nu} = -g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$$

e quindi :

$$(e) \quad \partial_\nu [-g_A \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^5 \psi + 2g_A \partial^\nu \phi a(\phi)] = \mu^2 \partial_\nu A^\nu$$

$$(f) \quad \partial_\nu [-g_V \bar{\psi} \gamma^\nu \psi] = 0$$

$$\text{Posto : } J_5^\mu =: \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi - 2a(\phi) \partial^\mu \phi$$

si può calcolare $\partial_\mu J_5^\mu$ dalle equazioni del moto (a) (e la complessa coniugata) e (b). Si ottiene consistenza con la (c) solo a patto di porre $a(\phi) = \text{costante}$ e $b(\phi) = 0$ e inoltre $S(\phi) = -aP'(\phi)$ e $P(\phi) = a S'(\phi)$ che è soddisfatta da $S(\phi) = m \cos(\phi/a)$ e $P(\phi) = -m \sin(\phi/a)$ (deve essere $S(0) = m$); inoltre deve essere $2g_A a = \mu$ per ottenere l'uguaglianza dei termini in $\partial_\mu A^\mu$.

Imponendo $\partial_\mu A^\mu = 0$ si ha quindi $\partial_\mu J_5^\mu = 0$.

La Lagrangiana fenomenologica è data quindi in conclusione dalla espressione :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & i \bar{\Psi} \gamma \cdot \partial \Psi + \frac{1}{2} \partial \phi \cdot \partial \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i{}^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} \mu^2 A^2 + g_A \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi A_\mu + g_V \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi V_\mu \\ & - m \bar{\Psi} \left(\exp \frac{2g_A}{\mu} \gamma^5 \phi \right) \Psi - \mu A^\mu \partial_\mu \phi \quad (32) \end{aligned}$$

che è invariante per le trasformazioni di gauge locali ($\theta = \theta(x)$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \Psi = i \gamma^5 \theta_1 \Psi & \delta \phi = -2a \theta_1 \\ \delta \bar{\Psi} = i \bar{\Psi} \gamma^5 \theta_1 & \delta V_\mu = 0 \\ \delta A_\mu = -\frac{1}{g_A} \partial_\mu \theta_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta \Psi = i \Psi \theta_2 & \delta \phi = 0 \\ \delta \bar{\Psi} = -i \bar{\Psi} \theta_2 & \delta V_\mu = 0 \\ \delta A_\mu = 0 & = -\frac{1}{g_V} \partial_\mu \theta_2 \end{array} \right.$$

Si può facilmente mostrare che è possibile disaccoppiare la eccitazione scalare ϕ .

Effettuando il cambiamento di variabili :

$$\begin{aligned} \Psi & \longrightarrow \exp \left(-\gamma^5 \frac{g_A}{\mu} \phi \right) \Psi \\ \bar{\Psi} & \longrightarrow \bar{\Psi} \exp \left(-\gamma^5 \frac{g_A}{\mu} \phi \right) \\ A_\mu & \longrightarrow A_\mu + \frac{1}{\mu} \partial_\mu \phi \end{aligned} \quad (33)$$

si ottiene :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & i \bar{\Psi} \gamma \cdot \partial \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu^2 A^2 \\ & + g_A \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi A_\mu + g_V \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi V_\mu \end{aligned} \quad (34)$$

che esibisce lo spettro fisico delle eccitazioni. Siccome la trasformazione (33) implica una scelta di gauge ($\theta(x) = g_A/\mu \phi(x)$) non si può più imporre $\partial_\mu A^\mu = 0$ e quindi la Lagrangiana (34) descrive mesoni massicci accoppiati ad una corrente non conservata.

La lagrangiana fenomenologica, come si vede dai termini non polinomiali nelle (32) o dalla non conservazione della corrente nella (34), porta ad una teoria non rinormalizzabile.

Questo non deve stupire, in quanto la Lagrangiana (32) da una descrizione appropriata solo delle regioni di basse energie e non è utilizzabile per calcoli di ordine più elevato.

Tuttavia è possibile che una descrizione fenomenologica più accurata possa venire data in termini di una Lagrangiana rinormaliz

zabile. Se per esempio nella teoria è presente un altro stato legato, scalare e massiccio, che forma con la eccitazione a massa zero un doppietto chirale, allora la Lagrangiana fenomenologica potrebbe essere rinormalizzabile.

In effetti la Lagrangiana (32) può venire derivata da un modello di tipo σ senza isospin :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v) = & i \bar{\psi} \gamma \cdot \partial \psi + \frac{1}{2} \partial \pi \cdot \partial \pi + \frac{1}{2} \partial \sigma \cdot \partial \sigma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i \\ & + g_A \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi A_\mu + g_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi V_\mu \\ & - 2g_A (\sigma \partial^\mu \pi - \pi \partial^\mu \sigma) A_\mu + 2g_A^2 (\sigma^2 + \pi^2) A^2 - G \bar{\psi} (\gamma^5 \pi + \sigma) \psi . \end{aligned}$$

σ è un campo scalare e π è un campo pseudoscalare. Gli accoppiamenti sono scelti compatibilmente con le simmetrie di gauge ($\theta = \theta(x)$):

$$\begin{array}{ll} \delta \psi = i \gamma^5 \theta_1 \psi & e \quad \delta \psi = i \psi \theta_2 \\ \delta \bar{\psi} = i \bar{\psi} \gamma^5 \theta_1 & \delta \bar{\psi} = -i \bar{\psi} \theta_2 \\ \delta \pi = -2 \sigma \theta_1 & \delta \pi = 0 \\ \delta \sigma = 2 \pi \theta_1 & \delta \sigma = 0 \\ \delta A_\mu = -\frac{1}{g_A} \partial_\mu \theta_1 & \delta A_\mu = 0 \\ \delta V_\mu = 0 & \delta V_\mu = -\frac{1}{g_V} \partial_\mu \theta_2 \end{array}$$

Imponendo il vincolo non lineare $\sigma^2 + \pi^2 = \mu^2/4g_A^2(v)$ e ridefinendo il campo π :

$$\pi = \frac{\mu}{2g_A} \sin \left(\frac{2g_A}{\mu} \phi \right) \quad \sigma = \frac{\mu}{2g_A} \cos \left(\frac{2g_A}{\mu} \phi \right)$$

si ha ancora la (32) con $G = 2g_A \frac{m}{\mu}$.

Se la teoria contiene anche un campo scalare, non è più necessario imporre il vincolo non-lineare (v) e i campi σ e π possono coesistere pacificamente dando luogo ad una Lagrangiana chirale del tipo soprascritto, con eventualmente altri termini invarianti. Una Lagrangiana di questo secondo tipo è rinormalizzabile e fornisce un esempio del meccanismo di Higgs convenzionale.

E' necessario comunque ribadire che la rinormalizzabilità della teoria fenomenologica non appare un requisito fondamentale. Si in-

travvede piuttosto la possibilità di costruire una gerarchia di Lagrangiane fenomenologiche che includano progressivamente gli stati legati di ordine superiore, ignorabili in una descrizione nelle basse energie.

Nonostante quanto è stato detto, esistono dei vincoli precisi sulla forma dei termini nella Lagrangiana fenomenologica. Per esempio non appare la possibilità di un termine $G \bar{\psi} \psi (\sigma^2 + \pi^2)$ in un modello con stati legati.

APPENDICE A

Derivazione delle identità di Ward-Takahashi

In questa appendice verranno derivate le identità di Ward-Takahashi per le funzioni di vertice assiale e vettoriale utilizzate nel cap. III.

La Lagrangiana (1) con un termine gauge-fixing $\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha'} (\partial_\mu V^\mu)^2$ fornisce le equazioni di moto per i campi di Heisenberg :

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu(x) = g_A \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi(x)$$

$$\left(\square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha'}\right) \partial_\mu \partial_\nu \right) V^\nu(x) = g_V \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)$$

La gauge-invarianza della Lagrangiana (1) permette di scrivere le equazioni del moto usando il gauge di Feynman ($\alpha = \alpha' = 1$) come :

$$\square A^\nu(x) = g_A j_A^\nu(x) \quad (A1)$$

$$\partial_\nu A^\nu(x) = 0$$

$$\square V^\nu(x) = g_V j_V^\nu(x) \quad (A2)$$

$$\partial_\nu V^\nu(x) = 0$$

ove si è posto :

$$j_A^\nu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi(x)$$

$$j_V^\nu(x) = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)$$

che sono due correnti conservate :

$$\partial_\nu j_A^\nu(x) = \partial_\nu j_V^\nu(x) = 0$$

Le seconde identità in (A1) e (A2) sono da intendersi nel senso di Gupta e Bleuler. Le relazioni di commutazione fondamentali a tempi uguali sono :

$$\delta(x_0 - y_0) \{ \Psi(x), \bar{\Psi}(y) \} = -\gamma^0 \delta^4(x-y)$$

$$\delta(x_0 - y_0) [\partial_\mu A_\mu(x), A_\nu(y)] = -i g_{\mu\nu} \delta^4(x-y)$$

(A3)

Da queste relazioni di commutazione si ottiene immediatamente
 ($[AB, C] = A \{ B, C \} - \{ A, C \} B$) :

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0) [\psi(x), j_A^0(y)] &= -\gamma^5 \psi(y) \delta^4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) [\bar{\psi}(x), j_A^0(y)] &= -\bar{\psi}(y) \gamma^5 \delta^4(x-y) \end{aligned} \quad (A4)$$

e analogamente :

$$\begin{aligned} \delta(x_0 - y_0) [\psi(x), j_V^0(y)] &= -\psi(y) \delta^4(x-y) \\ \delta(x_0 - y_0) [\bar{\psi}(x), j_V^0(y)] &= \bar{\psi}(y) \delta^4(x-y) \end{aligned} \quad (A5)$$

Diamo ora alcune definizioni. Il propagatore fermionico è definito da :

$$\langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{2} S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} S_F(p) \quad (A6)$$

e i propagatori assiale e vettoriale da :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} D_{\mu\nu}^A(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} D_{\mu\nu}^A(p) \\ \langle 0 | T V_\mu(x) V_\nu(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} D_{\mu\nu}^V(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} D_{\mu\nu}^V(p) \end{aligned} \quad (A7)$$

Le funzioni di vertice $\Gamma_{A,V}^\nu(p, q)$ sono definite da :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T A_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle &= -g_A \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S_F(p) \\ &\times \Gamma_A^\nu(p, q) S_F(q) D_{\nu\mu}^A(p-q) e^{ip(x-y)} e^{iq(x-z)} \\ \langle 0 | T V_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle &= -g_V \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S_F(p) \\ &\times \Gamma_V^\nu(p, q) S_F(q) D_{\nu\mu}^V(p-q) e^{ip(x-y)} e^{iq(x-z)} \end{aligned} \quad (A8)$$

e sono funzioni di Green a cui sono stati rimossi i propagatori esterni.

Consideriamo ora il caso del campo assiale e deriviamo la relativa identità di Ward. Dalle equazioni del moto e dalle relazioni di commutazione si possono derivare le seguenti identità :

$$\partial_\mu \square \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle = -i g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta^4(x-x') \quad (A9)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \square \langle 0 | T A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle &= g_A \partial_\mu \langle 0 | T j_A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\ &= g_A \delta^5 \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \delta^4(x-y) \\ &\quad + g_A \langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \delta^5 \delta^4(x-z) \end{aligned} \quad (A10)$$

Deriviamo la (A9). Usando la definizione di T - prodotto si ha :

$$\begin{aligned} \square \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle &= \langle 0 | \{ \partial_0 \delta(x_0 - x'_0) A_\mu(x) A_\nu(x') \\ &\quad + 2 \delta(x_0 - x'_0) \partial_0 A_\mu(x) A_\nu(x') \\ &\quad + \theta(x_0 - x'_0) \square A_\mu(x) A_\nu(x') \\ &\quad - \partial_0 \delta(x'_0 - x_0) A_\nu(x') A_\mu(x) \\ &\quad - 2 \delta(x'_0 - x_0) A_\nu(x') \partial_0 A_\mu(x) \\ &\quad + \theta(x'_0 - x_0) A_\nu(x') \square A_\mu(x) \} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \square A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \\ &\quad + 2 \langle 0 | [\partial_0 A_\mu(x), A_\nu(x')] | 0 \rangle \delta(x_0 - x'_0) \\ &\quad + \langle 0 | [A_\mu(x), A_\nu(x')] | 0 \rangle \partial_0 \delta(x_0 - x'_0) \\ &= \langle 0 | T \square A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle - i g_{\mu\nu} \delta^4(x-x') \end{aligned}$$

E quindi si ha :

$$\partial_\mu \square \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(x') | 0 \rangle = -i g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta^4(x-x') +$$

$$\begin{aligned}
 & + \langle 0 | \{ \delta(x_0 - x'_0) j_A^0(x) A^\nu(x') \\
 & + \theta(x_0 - x'_0) \partial_\mu j_A^\mu(x) A^\nu(x') \\
 & + \delta(x'_0 - x_0) A^\nu(x') j_A^0(x) \\
 & + \theta(x'_0 - x_0) A^\nu(x') \partial_\mu j_A^\mu(x) \\
 & = -i g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta^4(x - x') \\
 & + \delta(x_0 - y_0) \langle 0 | [j_A^0(x), A^\nu(x')] | 0 \rangle \\
 & = -i g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta^4(x - x')
 \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier di questa equazione è :

$$k^2 K_\mu D_A^{\mu\nu} = K^\nu \quad (A11)$$

Deriviamo la (A10). Usando anche qui la definizione di T-prodotto si ha :

$$\begin{aligned}
 & \partial_\mu \square \langle 0 | T A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle = \\
 & = \partial_\mu \langle 0 | \{ \partial_0 \delta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \\
 & + 2 \delta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \partial_0 A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \\
 & + \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \square A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \\
 & - \partial_0 \delta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \psi(y) A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \\
 & - \delta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \psi(y) \partial_0 A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \\
 & + \theta(y_0 - x_0) \partial_0 \delta(x_0 - z_0) \psi(y) A^\mu(x) \psi(z) \\
 & + \theta(y_0 - x_0) \delta(x_0 - z_0) \psi(y) A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \\
 & - \delta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \psi(y) \partial_0 A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \\
 & + \theta(y_0 - x_0) \delta(x_0 - z_0) \psi(y) \partial_0 A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \\
 & + \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \psi(y) \square A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \} | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \theta(y_0 - z_0) \partial_0 \delta(z_0 - x_0) \psi(y) \bar{\psi}(z) A^n(x) \\
 & - 2 \theta(y_0 - z_0) \delta(z_0 - x_0) \psi(y) \bar{\psi}(z) \partial_0 A^n(x) \\
 & + \theta(y_0 - z_0) \theta(z_0 - x_0) \psi(y) \bar{\psi}(z) \square A^n(x) \\
 & - \partial_0 \delta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) A^n(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) \\
 & + 2 \delta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) \partial_0 A^n(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) \\
 & - \theta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) \square A^n(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) \\
 & + \partial_0 \delta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) A^n(x) \psi(y) \\
 & + \delta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) \partial_0 A^n(x) \psi(y) \\
 & - \theta(z_0 - x_0) \partial_0 \delta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) A^n(x) \psi(y) \\
 & - \theta(z_0 - x_0) \delta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) \partial_0 A^n(x) \psi(y) \\
 & - \delta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) \partial_0 A^n(x) \psi(y) \\
 & + \theta(z_0 - y_0) \delta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) \partial_0 A^n(x) \psi(y) \\
 & - \theta(z_0 - y_0) \theta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) \square A^n(x) \psi(y) \\
 & + \theta(z_0 - y_0) \partial_0 \delta(y_0 - x_0) \bar{\psi}(z) \psi(y) A^n(x) \\
 & + 2 \theta(z_0 - y_0) \delta(y_0 - x_0) \bar{\psi}(z) \psi(y) \partial_0 A^n(x) \\
 & - \theta(z_0 - y_0) \theta(y_0 - x_0) \bar{\psi}(z) \psi(y) \square A^n(x) \} |0\rangle
 \end{aligned}$$

Le parentesi graffiate indicano la provenienza da uno stesso termine nel T-prodotto originario.

Si hanno molte cancellazioni e si ottiene :

$$\begin{aligned}
 & \partial_\mu \square \langle 0 | T A^n(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle = \\
 & = \partial_\mu \langle 0 | T \square A^n(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
 & = g_A \partial_\mu \langle 0 | T j_A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= g_A \langle 0 | \left\{ \delta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) j_A^0(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \right. \\
 &+ \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \partial_\mu j_A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) \\
 &- \delta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \psi(y) j_A^0(x) \bar{\psi}(z) \\
 &+ \theta(y_0 - x_0) \delta(x_0 - z_0) \psi(y) j_A^0(x) \bar{\psi}(z) \\
 &+ \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \psi(y) \partial_\mu j_A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \\
 &- \theta(y_0 - z_0) \delta(z_0 - x_0) \psi(y) \bar{\psi}(z) j_A^0(x) \\
 &+ \theta(y_0 - z_0) \theta(z_0 - x_0) \psi(y) \bar{\psi}(z) \partial_\mu j_A^\mu(x) \\
 &- \delta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) j_A^0(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) \\
 &- \theta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) \partial_\mu j_A^\mu(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) \\
 &+ \delta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) j_A^0(x) \psi(y) \\
 &- \theta(z_0 - x_0) \delta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) j_A^0(x) \psi(y) \\
 &\left. - \theta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \bar{\psi}(z) \partial_\mu j_A^\mu(x) \psi(y) \right\} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | \left\{ \delta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) g_A [j_A^0(x), \psi(y)] \bar{\psi}(z) \right. \\
 &+ \delta(x_0 - z_0) \theta(y_0 - z_0) g_A \psi(y) [j_A^0(x), \bar{\psi}(z)] \\
 &+ \delta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) g_A [\bar{\psi}(z), j_A^0(x)] \psi(y) \\
 &\left. + \delta(x_0 - y_0) \theta(z_0 - y_0) g_A \bar{\psi}(z) [\psi(y), j_A^0(x)] \right\} | 0 \rangle.
 \end{aligned}$$

Sfruttando le relazioni di commutazione (A4) si ha :

$$\begin{aligned}
 &= g_A \delta^5 \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \delta^4(x - y) \\
 &+ g_A \langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \delta^5 \delta^4(x - z)
 \end{aligned}$$

Dalle equazioni (A9) e (A10) si può derivare la identità di Ward relativa alla corrente assiale, come è scritta nella equazione (2) del cap. III. Infatti esprimendo le grandezze che compaiono nella (A10) in termini delle loro trasformate di Fourier (A7, A8, A9) si ha :

$$\begin{aligned} & \square \partial_\mu \langle 0 | T A^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \equiv \\ & \equiv -g_A \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S_F(p) \Gamma_A^\nu(p, q) S_F(q) D_A^{\nu\mu}(p-q) \\ & \quad \times e^{ip(x-y)} e^{iq(x-z)} [-(p-q)^2] [-i(p-q)_\mu] \\ & = g_A \delta^5 \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 p d^4 q S_F(q) e^{iq(x-z)} e^{ip(y-z)} \\ & \quad + g_A \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 p d^4 q S_F(p) e^{ip(y-x)} e^{iq(x-z)} \cdot \delta^5 . \end{aligned}$$

E quindi :

$$\begin{aligned} & i S_F(p) \Gamma_A^\nu(p, q) S_F(q) D_A^{\nu\mu}(p-q) (p-q)_\mu (p-q)^2 \\ & = \delta^5 S_F(p) + S_F(q) \delta^5 . \end{aligned}$$

Usando la relazione (A11) si ha :

$$-(p-q)_\nu \Gamma_A^\nu(p, q) = i S_F^{-1}(p) \delta^5 + i \delta^5 S_F^{-1}(q)$$

o anche

$$2_\mu \Gamma_A^\mu(p, p+z) = i S_F^{-1}(p) \delta^5 + i \delta^5 S_F^{-1}(p+z) .$$

La identità di Ward per la corrente vettoriale si deriva in modo analogo. Sfruttando le equazioni del moto (A2) e le relazioni di commutazione (A5) si ottiene :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \square \langle 0 | T V^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle & = g_V \partial_\mu \langle 0 | j_V^\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\ & = g_V \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \delta^4(x-y) \\ & \quad - g_V \langle 0 | T \psi(y) \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \delta^4(x-z) \end{aligned}$$

e anche :

$$\square \partial_\mu \langle 0 | T V^\mu(n) V^\nu(n') | 0 \rangle = -i g^{\mu\nu} \partial_\mu \delta^4(n-n')$$

e quindi in conclusione :

$$2_\mu \Gamma_\nu^{\mu\nu}(p, p+2) = i S_F^{-1}(p) - i S_F^{-1}(p+2) .$$

APPENDICE B

I nuclei integrali della equazione di Bethe-Salpeter per $B(p^2)$

In questa appendice si analizzerà la natura dei nuclei che compaiono nelle equazioni integrali per $B(p^2)$ (24) (nel caso $g_A^2 \neq g_V^2$) e (29) (nel caso $g_A^2 = g_V^2 = g$)²⁷. Premettiamo una definizione. Sia data la equazione integrale per $f(p)$:

$$f_\alpha(p) = \int d^4 p' K_{\alpha\beta}(p, p') f_\beta(p')$$

Si dice che $K(p, p')$ è un nucleo limitato (o di Fredholm) se esso soddisfa alla condizione :

$$\text{Tr} \iint d^4 p d^4 p' K^\dagger(p, p') K(p', p) < \infty$$

Se $K(p, p')$ soddisfa a questa condizione, allora esso per un noto teorema (v. Courant-Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik o Hellwig, Differential Operators of Mathematical Physics) ha spettro puramente discreto. In caso contrario questa circostanza in generale non si verifica.

La equazione (24) linearizzata può venire posta, in ambo i casi di rottura dinamica della simmetria (AoB) nella forma coinvolgente solo funzioni scalari :

$$B(p^2) = \int d^4 p' \chi(p, p') S(p') B(p'^2)$$

dove $S(p^2)$ è un fattore la cui presenza è da fare risalire al propagatore fermionico intermedio. La condizione (1) in questo caso diviene :

$$\iint d^4 p d^4 p' \chi(p, p') \chi(p', p) S(p^2) S(p'^2) < \infty$$

Nel caso di rottura dinamica della simmetria di tipo A si ha che $S(p) \chi(p, p') \sim \frac{1}{p^4}$ per $p^2 \rightarrow \infty$ e il nucleo relativo non è di Fredholm e non dà quindi luogo ad una condizione agli autovalori per le costanti di accoppiamento, ma ne restringe solo il dominio di variabilità.

Nel caso di rottura dinamica della simmetria di tipo B si ha viceversa che $S(p) \chi(p, p') \sim \frac{1}{p^6}$ per $p^2 \rightarrow \infty$ e il nucleo è di

Fredholm e si ha che la costante di accoppiamento assume solo valori discreti, come illustrato nel paragrafo 8) di questo capitolo.

APPENDICE C

La equazione di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala per $\Sigma(p)$ è data dall'espressione :

$$-i \Sigma(p) \equiv \text{diagramma} = \text{diagramma}$$

: propagatore fermionico

: propagatore bosonico

$$\text{diagramma } K_L = \text{diagramma } g_V + \text{diagramma } g_A$$

fig. 20

che è il primo termine dello sviluppo perturbativo per la inserzione di autoenergia fermionica, ma con propagatori vestiti.

Poniamo :

$$S_F(p) = \frac{i}{\not{p} - \Sigma(p)} \quad \Sigma(p) = \not{p} A(p^2) + m B(p^2)$$

$$D_{\mu\nu}^V(k) = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$$

$$D_{\mu\nu}^A(k) = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + i\epsilon - M^2}$$

Calcolando i diversi contributi e separando le parti proporzionali ad m e a \not{p} , si ha :

$$A(p^2) = -3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1 - A(k^2)}{k^2(1 - A(k^2)) - m^2 B(k^2)} \left[\frac{g_V^2}{(p-k)^2} - \frac{g_A^2}{(p-k)^2 - M^2} \right]$$

$$B(p^2) = -3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{B(k^2)}{k^2(1 - A(k^2)) - m^2 B(k^2)} \left[\frac{g_V^2}{(p-k)^2} - \frac{g_A^2}{(p-k)^2 - M^2} \right]$$

La prima può venire risolta iterativamente secondo i metodi usuali una volta nota $B(p^2)$. La seconda è identica alla eq. (24) una volta posto $A(k^2) = 0$.

CAPITOLO IV

ROTTURA DINAMICA DELLA SIMMETRIA IN TEORIE DI GAUGE NON ABELIANE

Il presente capitolo è dedicato all'analisi del meccanismo di Schwinger dinamico in teorie di Yang-Mills con campi di materia.²⁶ Verranno derivate relazioni per le masse fermioniche e le masse bosoniche nella approssimazione nella quale si trattiene solo il contributo singolare a zero momento trasferito delle funzioni di vertice (approssimazione "polo"). I risultati verranno confrontati con i risultati corrispondenti in teorie di Higgs convenzionali. Infine si risolveranno le equazioni integrali espresse con i nuclei di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala. Vengono inoltre descritti alcuni vincoli che limitano i gruppi di simmetria accettabili e la forma delle matrici di rappresentazione.

Nel primo paragrafo si mostra la consistenza del meccanismo di generazione spontanea delle masse fermioniche e bosoniche in teorie di Yang-Mills accoppiate a campi di materia. Sostanzialmente si estendono ad un gruppo di simmetria non abeliano le considerazioni fatte sui modelli abeliani nel capitolo precedente. Una rottura spontanea della simmetria da parte della inserzione di autoenergia fermionica o del tensore di polarizzazione implica la presenza di uno stato legato a massa zero sia nel canale fermione-antifermione, sia nel canale relativo a due bosoni vettori. Si assume inoltre che i campi di ghost, necessari per rendere finiti i funzionali generatori della teoria simmetrica, restino a massa zero.

Come nel caso abeliano, anche in questo capitolo si mostrerà solo la consistenza di una soluzione asimmetrica alle equazioni del moto, senza da questo poterne inferire che essa si realizzi effettivamente.

Nel secondo paragrafo vengono ricavate relazioni tra le masse delle particelle in approssimazione "polo". Esse indicano qualitativamente la natura dello spettro delle masse e vengono comparate con i risultati all'ordine zero nei modelli di Higgs convenzionali. Risulta possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra i parametri liberi in queste ultime teorie e le grandezze di natura dinamica nelle soluzioni "superconduttrici".

Il terzo paragrafo è dedicato alla soluzione delle equazioni integrali rilevanti, qualora questo sia possibile. Si analizzano in dettaglio le soluzioni che si riconducono ad una generazione ultravioletta (A) della massa nel limite di accoppiamento debole. In questo caso si ricercano soluzioni nelle quali le masse dipendono analiticamente dalle costanti di accoppiamento. Il caso di generazione infrarossa viene esaminato a parte. Si esamina infatti anche la consistenza di una possibile generazione delle masse bosoniche in teorie di Yang-Mills pure, cioè in assenza di campi di materia. Infatti nell'ipotesi che il tensore di polarizzazione possieda una parte asimmetrica, $[\tau_\alpha, \pi(p^2)]_{\mu\nu} \neq 0$ esso stesso acquisisce un polo a zero momento trasferito per la presenza di uno stato legato a massa zero che comunica sia con lo stato a un mesone vettore che con lo stato a due mesoni vettori. Uno stato legato bosonico di questo tipo è vietato nei modelli abeliani per invarianza sotto coniugazione di carica (teorema di Furry per la corrente assiale). In ogni caso si derivano alcuni vincoli sui gruppi di simmetria. Non è possibile nessuna soluzione (di tipo A) con SU(n) se i fermioni sono nella rappresentazione fondamentale, come è anche inconsistente una soluzione asintotica nel caso di gruppi chirali non-abeliani. Quest'ultimo risultato era già stato ricavato nel caso di gruppi chirali abeliani.

Nel quarto paragrafo vengono infine esaminate le condizioni per una situazione di rottura dinamica della simmetria di tipo B in teorie di gauge non abeliane.

1) Rottura dinamica della simmetria in teorie di gauge non abeliane in presenza di campi di materia.

Si considera la densità Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu}_\alpha + i \bar{\Psi} (D^\mu \gamma_\mu - m_0) \Psi$$

dove

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g C_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \quad (1)$$

e gli A_μ^α si trasformano secondo la rappresentazione regolare del gruppo di Lie G (nel caso che G non sia semplice è sufficiente operare la sostituzione $g \rightarrow g_\alpha$ con g_α costante in ogni sottogruppo semplice) con generatori :

$$[T_\alpha, T_\beta] = i C_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma$$

e D^μ è la derivata covariante :

$$(D^\mu \Psi)_m = (\partial^\mu \delta_{mn} + i g t_{mn}^\alpha A_\alpha^\mu) \Psi_n$$

$$[t_\alpha, t_\beta]_{mn} = i C_{\alpha\beta\gamma} (t_\gamma)_{mn}$$

e m, n sono indici di simmetria interna per i fermioni. Le matrici $\{t^\alpha\}$ della rappresentazione spinoriale potranno dipendere sia da \uparrow che da γ^5 . Sotto trasformazioni di gauge locali infinitesime i campi si trasformano secondo :

$$\delta \Psi_m = -i g t_{mn}^\alpha \Psi_n \theta_\alpha(x)$$

$$\delta A_\alpha^\mu = g C_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma^\mu \theta_\beta(x) + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta_\alpha(x)$$

e la Lagrangiana (1) è invariante se G è tale che $[t_\alpha, \gamma^0 m_0] = 0$. La corrente di gauge che deve venire conservata per le equazioni del moto classiche :

$$\partial_\nu F_\alpha^{\mu\nu}(x) = g C_{\alpha\beta\gamma} A_\beta^\nu(x) F_\gamma^{\mu\nu}(x)$$

è

$$J_\alpha^\mu(x) = \partial_\nu F_\alpha^{\mu\nu}(x) \quad (2)$$

ed è anche la corrente di Noether.

Inoltre la teoria simmetrica derivabile dalla Lagrangiana (1) è

rinormalizzabile a meno di divergenze infrarosse ^{1,2,3}.

A questo punto insorgono due complicazioni in questa teoria che non sono presenti nel modello abeliano. Innanzitutto per ottenere una teoria quantistica finita per mesoni vettoriali interagenti secondo la (1) è necessario separare il volume di gauge nel funzionale generatore delle funzioni di Green secondo il metodo di Fadeev e Popov. Una conseguenza di questo fatto è l'apparizione di ghost scalari con statistica fermionica in gauge covarianti. Inoltre è richiesta l'introduzione di un termine gauge-fixing della forma :

$$-\frac{1}{2\alpha} \left[\partial_\mu A^\mu_\beta \right]^2$$

per rendere la parte quadratica della Lagrangiana non-singolare. Per $\alpha = 0$ si ha il gauge di Landau e per $\alpha = 1$ il gauge di Feynman. I ghosts non compariranno negli stati uscenti se non saranno presenti in quelli entranti, ma in teoria perturbativa saranno presenti vertici ghost-ghost-bosone vettore. La Lagrangiana dei ghosts è data da :

$$\mathcal{L}_G(x) = - \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi_a^* - g C_{abc} \partial_\mu \phi_a^* A_b^\mu \phi_c$$

Inoltre per semplicità verrà in seguito usato il gauge di Landau. La notazione usata è illustrata nella fig.(1).

La seconda differenza consiste nel fatto che, nel caso presente, sia la inserzione di autoenergia fermionica $\Sigma(p)$ che la funzione di correlazione a due punti $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(p)$ soddisfano ad identità di Ward-Takahashi, in quanto è qui presente anche un vertice con tre bosoni. Dovendo la corrente (2) rimanere conservata, la rottura dinamica della simmetria deve essere legata all'apparire di bosoni di Goldstone composti, piuttosto che alla nonconservazione anomala della corrente come nell'elettrodinamica di Schwinger in due dimensioni.²⁰ Per ottenere una soluzione consistente, l'esistenza di una parte asimmetrica in un settore, per esempio nella inserzione di autoenergia fermionica, richiederà l'esistenza di poli di Nambu-Goldstone anche negli altri settori, per esempio nel settore con due ghosts e nel settore con due o tre mesoni vettori, a meno che non sussistano regole di superselezione. Questa circostanza può

venire facilmente verificata osservando le identità di Ward della teoria.

Le divergenze ultraviolette della teoria possono venire affrontate con il metodo della regolarizzazione dimensionale^{2,3} ma il problema della rinormalizzazione verrà in seguito (temporaneamente) posto in disparte. Le singularità infrarosse non appaiono nelle funzioni di Green per l'ipotesi di rottura dinamica della simmetria con acquisizione di massa.

Per discutere la rottura dinamica della simmetria sono necessarie le identità di Ward e le equazioni di Dyson. La loro derivazione è svolta nella appendice (B).

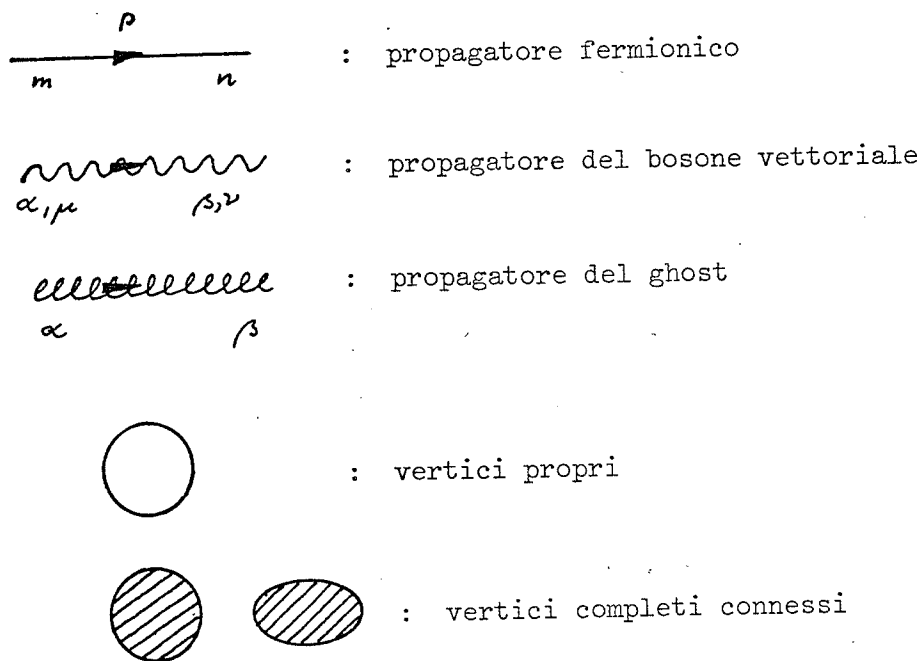


fig.I Notazione .

Il tensore di polarizzazione $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)$ è dato, in termini di $D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)$ e $D_{0\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)$, dalla relazione :

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = -i [D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)]^{-1} + i [D_{0\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)]^{-1}$$

Inoltre le identità di Ward (v. appendice eq.A) affermano che :

$$\frac{1}{\alpha} k^\mu k^\nu D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = \delta_{\alpha\beta} \quad (3)$$

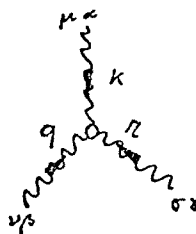
cosicchè il propagatore vestito può venire scritto nella forma :

$$D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = -i \left(\frac{g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu / k^2}{k^2 + i\varepsilon} \left[\delta_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta}(k^2) \right]^{-1} + \alpha \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\varepsilon)^2} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (4)$$

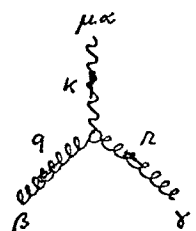
dove :

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = (g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \Pi_{\alpha\beta}(k^2) \quad (5)$$

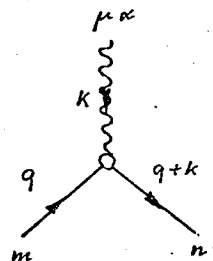
per la trasversalità del tensore di polarizzazione in conseguenza della gauge-invarianza della teoria. La parte traversa del propagatore relativo al mesone vettore ha un polo per $k^2 = 0$ a meno che $\Pi_{\alpha\beta}(k^2)$ non acquisisca esso stesso un polo per $k^2 = 0$, nel qual caso il mesone vettore acquista una massa attraverso il meccanismo di Schwinger.



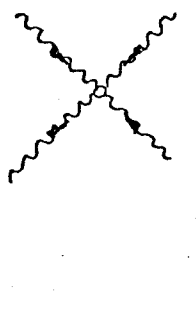
$$= -g C_{\alpha\beta\gamma} \left[g^{\mu\nu} (k-q)^\sigma + g^{\nu\sigma} (q-r)^\mu + g^{\sigma\mu} (r-k)^\nu \right]$$



$$= -g C_{\alpha\beta\gamma} r^\mu \quad (k+q-r=0)$$



$$= -ig \gamma^\mu t^\alpha$$



$$= -ig^2 \left\{ C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\epsilon} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\epsilon} - g^{\mu\epsilon} g^{\nu\sigma}) \right. \\ \left. + C_{\alpha\gamma\delta} C_{\beta\delta\epsilon} (g^{\mu\nu} g^{\delta\epsilon} - g^{\mu\epsilon} g^{\nu\delta}) \right. \\ \left. + C_{\alpha\delta\epsilon} C_{\beta\gamma\delta} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\delta\epsilon}) \right\}$$

fig.2 Vertici nudi .

Il propagatore nudo del ghost è dato da :

$$G_{\alpha\beta}(\kappa) = \frac{i}{\kappa^2 + i\varepsilon} \delta_{\alpha\beta} \quad (6)$$

La figura (3) mostra la equazione di Dyson per il propagatore vestito del ghost (v. Appendice B per la sua derivazione).

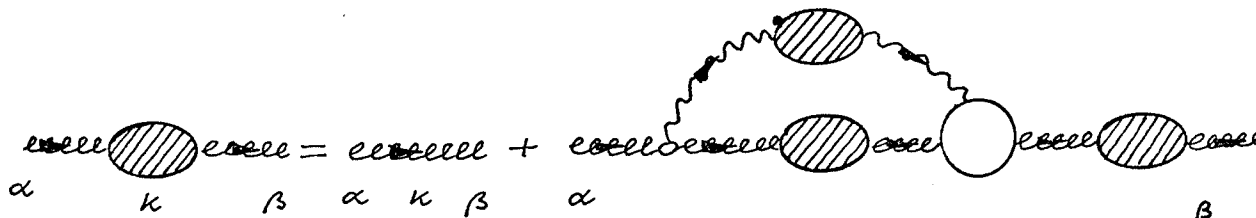


fig.3 Equazione di Dyson per il propagatore del ghost .

Essa mostra che l'inserzione di autoenergia del ghost, per la presenza del primo vertice nudo, si può scrivere come $\Sigma_G^{\alpha\beta}(\kappa) = \kappa^\mu \Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\kappa}(\kappa)$ e per invarianza Lorentziana $\Sigma_{\alpha\beta}^{\mu\kappa} = \kappa^\mu B_{\alpha\beta}(\kappa^2)$ e il propagatore del ghost vestito diviene quindi :

$$G_{\alpha\beta}(\kappa) = \frac{i}{\kappa^2 + i\varepsilon} [\delta_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}(\kappa^2)] \quad (7)$$

Si assumerà nel seguito che $B_{\alpha\beta}(\kappa^2)$ sia regolare per $\kappa^2 \rightarrow 0$ e che quindi il ghost resti a massa zero. Un polo di questo tipo richiederebbe tra l'altro eccitazioni di Goldstone scalari fermioniche, una situazione che non si prospetta per i bosoni di Goldstone dinamici.

La equazione di Dyson per la autoenergia fermionica è illustrata nella fig. (4) (v. Appendice B per la sua derivazione).

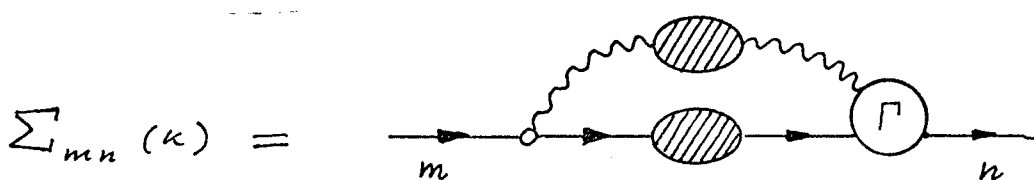


fig.4 Equazione di Dyson per il propagatore fermionico .

Il propagatore fermionico nudo è

$$S_{mn}^0(p) = \frac{i}{p + i\varepsilon} \delta_{mn} \quad (8)$$

ed il suo corrispettivo vestito è dato da :

$$S_{mn}(p) = \frac{i}{p \delta_{mn} - \Sigma_{mn}(p) + i\epsilon} \quad (9)$$

La fig. 5 illustra infine la equazione di Dyson per il tensore di polarizzazione di vuoto (v. Appendice B)

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = & \frac{1}{2} \text{diagram 1} - \text{diagram 2} \\ & + \frac{1}{6} \text{diagram 3} - \text{diagram 4} \\ & + \frac{1}{2} \text{diagram 5} \end{aligned}$$

fig.5 Equazione di Dyson per il tensore di polarizzazione proprio.

Per poter a questo punto discutere la rottura dinamica della simmetria sono necessarie le identità di Ward per i vertici vettore-vettore-vettore e fermione-fermione-vettore. Queste sono derivate nella appendice A. La prima è data da :

$$\begin{aligned} k^\mu T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(\kappa, P) [1 + B(\kappa^2)] = & \\ - g [g^{\nu\sigma'} C_{\alpha\beta\sigma'} - \bar{B}_{\alpha\beta\sigma'}^{\nu\sigma}(\kappa, P)] [\delta_{\gamma'\gamma} + \Pi_{\gamma'\gamma}(P+\kappa)] [(P+\kappa)^2 g^{\sigma'\sigma} - (P+\kappa)^{\sigma'}(P+\kappa)^{\sigma}] & \\ + g [g^{\sigma\nu'} C_{\alpha\beta'\gamma} - \bar{B}_{\alpha\beta'\gamma}^{\sigma\nu}(\kappa, P)] [\delta_{\beta'\beta} + \Pi_{\beta'\beta}(P)] [P^2 g^{\nu'\nu} - P^{\nu'}P^{\nu}] & \end{aligned} \quad (10)$$

ove $\delta_{\alpha\beta} B(\kappa^2) = B_{\alpha\beta}(\kappa^2)$ e $\bar{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\nu\sigma}(\kappa, P)$ è definita nella fig. 6, assieme a $T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(\kappa, P)$.

La identità (10) si semplifica considerevolmente se si considera il limite di accoppiamento debole e inoltre per $k \rightarrow 0$. La funzione $B(k^2)$ è sostanzialmente la autoenergia del ghost e quindi $B(0)$ può venire riassorbito nella rinormalizzazione del campo di ghost

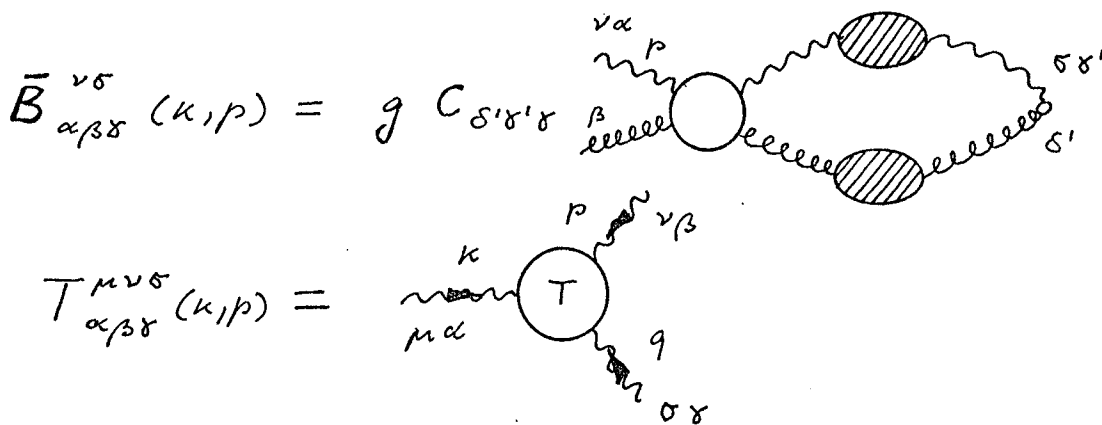


fig.6 La funzione \bar{B} relativa alla identità di Ward vettoriale e definizione del vertice vettoriale .

in maniera tale che $1 + B(0)$ possa venire omissa. Inoltre $\bar{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\nu\sigma}(k,p)$ è sicuramente di ordine g^3 o superiore nella costante di accoppiamento e può venire anche esso omissa nel limite di accoppiamento debole. Usando le proprietà delle identità di Ward si ottiene (si veda la Appendice A) :

$$\lim_{k \rightarrow 0} k_\mu T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(k,p) = (p^2 g^{\nu\sigma} - p^\nu p^\sigma) [g T_\alpha - b_\alpha(p^2), \Pi(p^2)]_{\beta\gamma} \quad (11)$$

(limite per $k \rightarrow 0$)

con $(T_\alpha)_{\beta\gamma} = C_{\beta\alpha\gamma}$, $(b_\alpha(p^2))_{\beta\gamma} = b_{\alpha\beta\gamma}(p^2)$

e $b_{\alpha\beta\gamma}(p^2)$ è la parte traversa di $\bar{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu}(k,p)$ per $k \rightarrow 0$:

$$\bar{B}_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu}(k,p) \xrightarrow{k \rightarrow 0} (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) b_{\alpha\beta\gamma}(p^2) + \text{termini} \propto \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$$

ovvero :

$$\lim_{k \rightarrow 0} k_\mu T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(k,p) = (p^2 g^{\nu\sigma} - p^\nu p^\sigma) [g T_\alpha, \Pi(p^2)]_{\beta\gamma} \quad (12)$$

(limite $k \rightarrow 0$ e accoppiamento debole)

La seconda identità di Ward (vertice fermione-fermione-bosone vettore) è data dalla espressione :

$$k_\mu \Gamma_{mn\alpha}^\mu(k,p) [1 + B(k^2)] = [g t_{mp}^\alpha - \tilde{B}_{mp}^\alpha(k,p)] S_{pn}^{-1}(p+k) - S_{mp}^{-1}(p) \gamma^0 [g t_{pn}^\alpha - \tilde{B}_{pn}^\alpha(k,p)] \gamma^0 \quad (13)$$

dove :

$$\Gamma_{mna}^{\mu} (k, p) = \text{diagram} \quad q = -k - p$$

fig.7 Definizione del vertice fermionico .

$$\tilde{B}_{mp}^{\alpha} (k, p) = g t_{mn}^{\beta} \text{diagram}$$

fig.8 La funzione \tilde{B} relativa alla identità di Ward per il vertice fermionico .

Nel limite di accoppiamento debole la funzione $\tilde{B}_{mp}^{\alpha} (k, p)$ può venire trascurata ($\sim g^3$ o superiore) e si ha, parallelamente a quanto sopra visto, per la identità di Ward fermionica : ($\tilde{b}^{\alpha}(p) = \lim_{k \rightarrow 0} \tilde{B}^{\alpha}(k, p)$)

$$\lim_{k \rightarrow 0} k_{\mu} \Gamma_{mna}^{\mu} (k, p) = [g t^{\alpha} + \tilde{b}^{\alpha}(p)] \Sigma(p)_{mn} - [\Sigma(p) \delta^{\alpha} (g t^{\alpha} + \tilde{b}^{\alpha}(p)) \delta^{\alpha}]$$

(limite $k \rightarrow 0$) (14)

e

$$\lim_{k \rightarrow 0} k_{\mu} \Gamma_{mna}^{\mu} (k, p) = [g t^{\alpha} \Sigma(p)]_{mn} - [\Sigma(p) \delta^{\alpha} g t^{\alpha} \delta^{\alpha}]_{mn}$$

(limite $k \rightarrow 0$ e accoppiamento debole) (15)

Le equazioni (12) e (15) formano, come nel caso abeliano, il punto di partenza per la discussione della rottura dinamica della simmetria generata nella regione ultravioletta (tipo A) in modelli non abeliani con gruppi di Lie semplici.

Si supponga che $\Sigma_{mn}(p)$ abbia una parte che viola la simmetria (cioè il lato destro della (15) sia $\neq 0$ per qualche α). Al-

lora il lato destro della (15) è non nullo e $\Gamma_{mn\alpha}^{\mu}(k,p)$ sviluppa un polo (di Nambu-Goldstone) per $k^2 = 0$. Inoltre, come già anticipato, una asimmetria in $\sum_{mn}(p)$ non può non accompagnarsi, a meno che non siano presenti regole di superselezione, ad una analoga asimmetria in $\prod_{\alpha\beta}(p)$ (e quindi in ultima analisi nella matrice di massa dei mesoni vettoriali) con la conseguente apparizione di un polo a zero momento trasferito nel canale vettore-vettore.

Procedendo per ordine si ha quindi innanzitutto un polo per $k^2 = 0$ in $\Gamma_{mn\alpha}^{\mu}(k,p)$. Questo polo, come nel caso abeliano va attribuito a poli nelle funzioni irriducibili per un mesone vettore (lvi) (cioè non separabili in due parti distinte collegate solo da un propagatore vettoriale nel canale s) a quattro e cinque punti. Questa situazione è illustrata nelle fig. 9 e 10

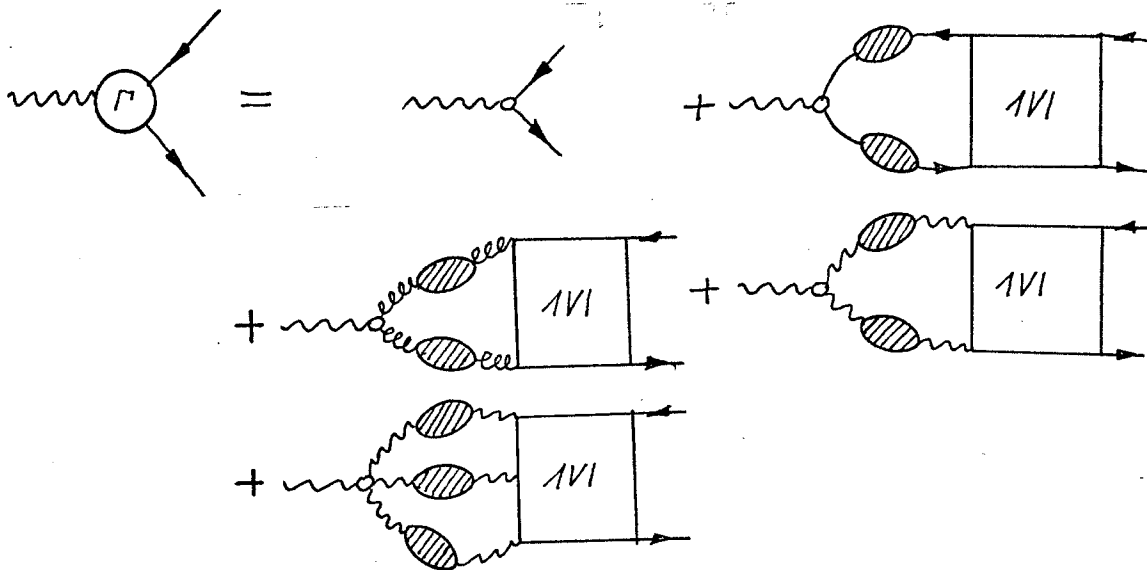
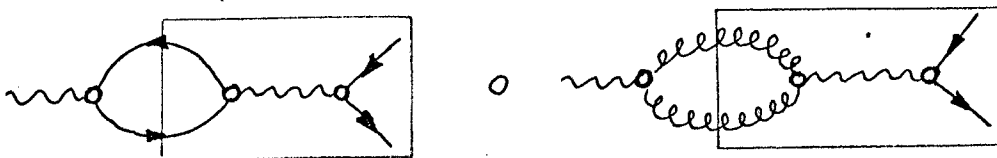


fig.9 La funzione di vertice fermionica in funzione dei nuclei irriducibili per particella singola .

funzioni a quattro punti (ampiezze di diffusione) non irriducibili per un mesone vettore sono per esempio :



Anche grafici sconnessi sono esclusi dai nuclei :

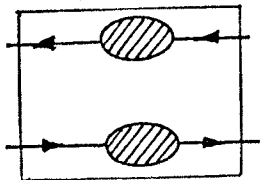


fig.10 Esempi di grafici non contenuti nei nuclei irriducibili .

e si ha quindi che deve essere :

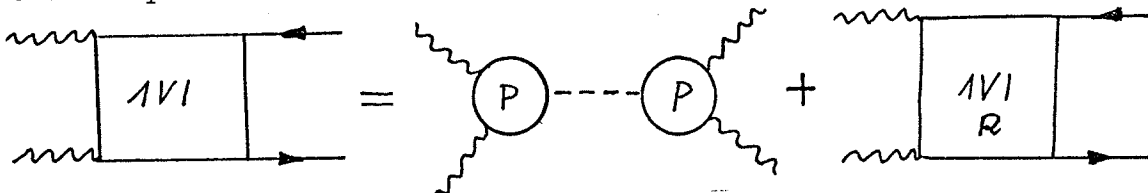


fig.II Esempio di decomposizione di un nucleo irriducibile per particella singola in parte regolare e parte singolare per $q^2 \rightarrow 0$.

ove R è regolare per $k^2 \rightarrow 0$.

Effettuando anche qui, come nel modello abeliano, la fattorizzazione della funzione di vertice, scriviamo $\Gamma_{\alpha mn}^{\mu}(k,p)$ in prossimità del polo $k^2=0$ nella forma

$$\Gamma_{\alpha mn}^{\mu}(k,p)_{\text{polo}} = \frac{\kappa^{\mu}}{k^2} \lambda_{\alpha a}(k) P_{amn}^F(k,p) \quad (16)$$

La matrice $\lambda_{\alpha a}(k)$ descrive l'accoppiamento del bosone di Goldstone indicizzato da a al mesone vettore α . $P_{amn}^F(k,p)$ è il vertice fermione-fermione-bosone di Goldstone. Questa situazione è compendata nella figura 12. La espressione completa per $\lambda_{\alpha a}(k^2)$ è mostrata nella fig. 13. Essa è calcolabile, come nel caso abeliano (si veda la eq. (12) del cap.III) una volta noti i fattori di forma $P_{amn}^F(k,p)$. $P_{F,G,V,3V}$ denotano i vertici che accoppiano bosoni di Goldstone a fermioni, ghosts, due bosoni vettori e tre bosoni vettori rispettivamente.

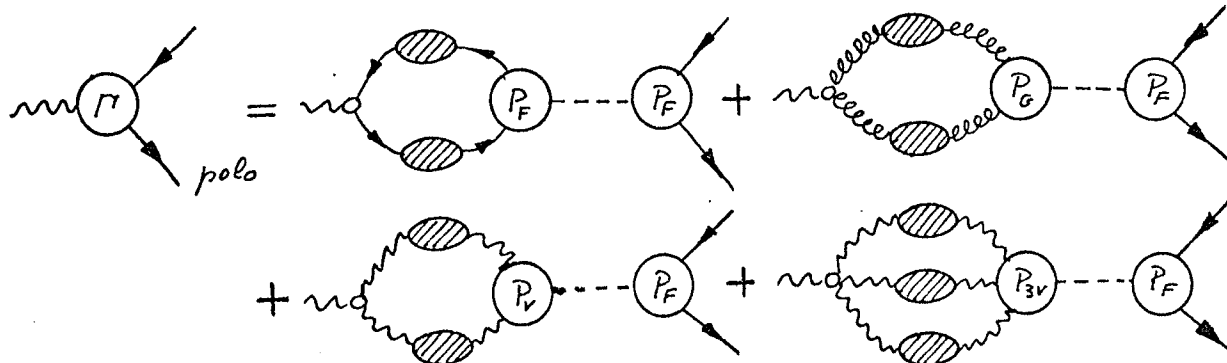


fig.12 La parte dominante nella funzione di vertice in prossimità del polo .

$$k^\mu \lambda_{\alpha\alpha}(k^2) = \frac{1}{2} \text{diagram}_1 - \text{diagram}_2 - \text{diagram}_3 + \frac{1}{6} \text{diagram}_4$$

fig.I3 Espressione per la matrice $\lambda_{\alpha\alpha}(k^2)$ che descrive l'accoppiamento tra i mesoni vettoriali e i bosoni di Goldstone .

Analoghe relazioni si derivano per $T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(k,p)$ in prossimità di $k^2 = 0$. Il risultato, come si inferisce rapidamente dalla equazione integrale per la funzione di vertice vettoriale (scritta in termine dei nuclei 1VI come nel caso del vertice fermionico e con le stesse avvertenze) è illustrato nella fig. 15 e dalla equazione corrispondente (17).

$$T = \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 + \text{diagram}_4 + \frac{1}{2} \text{diagram}_5 + \frac{1}{2} \text{diagram}_6$$

fig.I4 La funzione di vertice bosonica in funzione dei nuclei irriducibili per particella singola .

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma} \text{ polo} = \text{diagram}_1 + \text{diagram}_2 + \text{diagram}_3 + \text{diagram}_4$$

fig.I5 La parte dominante della funzione di vertice in prossimità del polo .

cioè :

$$T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(k,p)_{\text{polo}} = \frac{k^\mu}{k^2} g \lambda_{\alpha\alpha}(k) P_{\nu\beta\gamma\alpha}^{\nu\sigma}(p,k) \quad (17)$$

Dalla identità di Ward per $T_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\sigma}(k,p)$ a zero momento trasferito (eq. 11) si deduce che $P_{\nu\beta\gamma\alpha}^{\nu\sigma}(p)$ è trasverso e si può quindi definire $P_{\tau\beta\gamma\alpha}(p)$ tramite :

$$P_{\nu\beta\gamma\alpha}^{\nu\sigma}(p) = \left(g^{\nu\sigma} - \frac{p^\nu p^\sigma}{p^2} \right) P_{\tau\beta\gamma\alpha}(p^2) \quad (18)$$

Inoltre $P_{\tau\beta\gamma\alpha}(p)$ deve essere simmetrico in β, γ perchè il vertice vettoriale completo è Bose-simmetrico.

Determiniamo ora la struttura del polo in $\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)$ per $k^2 \rightarrow 0$. Usando la equazione di Dyson per il tensore di polarizzazione (fig.5) in approssimazione $k^2 \rightarrow 0$ si ottiene, usando la espressione (17) e contraendo anche il secondo loop presente in ogni addendo in un vertice $\lambda_{\alpha\alpha}(k)$, la seguente espressione :

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k)_{\text{polo}} = \left[-k^\mu \lambda_{\alpha\alpha}(k^2) \right] \frac{1}{k^2} \left[k^\nu \lambda_{\alpha\beta}^*(k^2) \right]$$

che è la generalizzazione della eq. (13) del cap. III,

$$= -\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \lambda_{\alpha\alpha}(k^2) \lambda_{\alpha\beta}^*(k^2), \quad (19)$$

per cui dalla eq. (5) si ha :

$$-k^2 \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k^2) \underset{k^2 \rightarrow 0}{\cong} -\lambda_{\alpha\alpha}(0) \lambda_{\alpha\beta}^*(0) \equiv \mu_{\alpha\beta}^2 \quad (20)$$

In questa approssimazione la matrice di massa dei mesoni vettori è data da (m è il numero di bosoni di Goldstone) :

$$-\mu_{\alpha\beta}^2 = \sum_{a=1}^m \lambda_{\alpha a}(0) \lambda_{a\beta}^*(0) \quad (21)$$

La discussione della struttura delle matrici di massa verrà ripresa nel paragrafo successivo.

A conclusione di questa sezione mostriamo che le eccitazioni di Goldstone si disaccoppiano e non appaiono come poli nella matrice di

diffusione. La argomentazione è anche qui simile al caso abeliano (cap.III, par.2). Assumendo che stati entranti (A) ed uscenti (B) comunichino con lo stato legato, si scrive per la ampiezza di diffusione ($s = k^2$) (omettendo anche qui funzioni d'onda entranti ed uscenti; i momenti esterni si intendono sul mass-shell):

$$T_{AB}(s = k^2, \dots) = T_{AB}^{(1)} + T_{AB}^{(2)} + (\text{reg. in } k^2 = 0)$$

con

$$T_{AB}^{(1)}(s = k^2, \dots) = T_{A\alpha}^{\mu}(k, \dots) D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k) T_{B\beta}^{*\nu}(k, \dots)$$

e

$$T_{AB}^{(2)}(s = k^2, \dots) = g^2 P_{A\alpha}(k, \dots) \frac{i}{k^2} P_{\alpha, B}^*(k, \dots)$$

Per la identità di Ward $k_{\mu} T_{A\alpha}^{\mu}(k, \dots) = k_{\nu} T_{B\beta}^{*\nu}(k, \dots) = 0$, essendo le particelle entranti ed uscenti sul mass-shell.

Inoltre per l'assunzione di fattorizzabilità dei poli di

Goldstone:

$$T_{A\alpha}^{\mu}(k, \dots) = \frac{k^{\mu}}{k^2} g \bar{P}_{A\alpha}(k=0) + T_{A\alpha}^{\mu(\text{reg.})}$$

$$T_{B\beta}^{*\nu}(k, \dots) = -\frac{k^{\nu}}{k^2} g \bar{P}_{B\beta}^{*}(k=0) + T_{B\beta}^{*\nu(\text{reg.})}$$

Per cui per $T_{AB}^{(1)}$ si può scrivere, usando la identità di Ward in modo analogo al caso abeliano:

$$T_{AB}^{(1)}(s = k^2, \dots) = T_{A\alpha}^{\mu}(k, \dots) D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k) T_{B\beta}^{*\nu}(k, \dots)$$

$$= T_{A\alpha}^{\mu}(k, \dots) \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left[1 + \Pi(k^2) \right]_{\alpha\beta}^{-1} T_{B\beta}^{*\nu}(k, \dots)$$

$$= -g^2 \bar{P}_{A\alpha}(0, \dots) \frac{k^{\mu}}{k^2} \frac{i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left[1 + \Pi(k^2) \right]_{\alpha\beta}^{-1} \bar{P}_{B\beta}^{*}(0, \dots) \frac{k^{\nu}}{k^2}$$

$$+ T_{A\alpha}^{\mu(\text{reg.})}(k, \dots) \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left[1 + \Pi(k^2) \right]_{\alpha\beta}^{-1} T_{B\beta}^{*\nu(\text{reg.})}(k, \dots)$$

dove :
$$\bar{P}_{A\alpha}(0, \dots) = \sum_{a=1}^m P_{Aa}(0, \dots) \lambda_{a\alpha}(0) ;$$

m è il numero di bosoni di Goldstone.

Quindi $T_{AB}^{(1)}$ è dato da (a parte termini regolari per $k^2 \rightarrow 0$) :

$$T_{AB}^{(1)}(s=k^2, \dots) = - \sum_{a,b=1}^m g^2 P_{Aa}(0, \dots) \lambda_{a\alpha} \frac{i}{k^2} [1 + \Pi(k^2)]_{\alpha\beta}^{-1} \lambda_{\beta b}^* P_{Bb}^*(0, \dots) \\ + T_{A\alpha}^{\mu(\text{reg.})}(k, \dots) \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} [1 + \Pi(k^2)]_{\alpha\beta}^{-1} T_{B\beta}^{*\nu(\text{reg.})}(k, \dots)$$

$\Pi_{\alpha\beta}(k^2)$, come si è visto si può decomporre in parte singolare parte regolare per $k^2 \rightarrow 0$:

$$\Pi_{\alpha\beta}(k^2) = \frac{1}{k^2} \lambda_{\alpha a} \lambda_{a\beta}^* + \Pi_{\alpha\beta}^{(\text{reg.})}(k^2)$$

Diagonalizzando la matrice di massa si ha in approssimazione "polo" :

$$- \sum_{a=1}^m \lambda_{\alpha a} \lambda_{a\beta}^* = \mu_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{non si somma su } \alpha) \quad (21)$$

Assumiamo che N vettori divengano massicci e i restanti rimangono a massa zero. Allora per $k^2 \rightarrow 0$ si ha :

$$\left[\frac{1}{k^2 [1 + \Pi(k^2)]} \right]_{\alpha\beta} = \begin{cases} - \frac{1}{\mu_\alpha^2} \delta_{\alpha\beta} & \text{per } \alpha \leq N \\ \frac{1}{k^2} \delta_{\alpha\beta} & \text{per } \alpha > N \end{cases}$$

dove N indica un numero di mesoni che si suppongono massicci;

$\alpha, N \leq d(G)$ dove $d(G)$ è la dimensione del gruppo.

La cancellazione delle singolarità di Goldstone per $k^2 = 0$ nella ampiezza di diffusione T_{AB} avviene quindi se è soddisfatta la condizione :

$$\sum_{\alpha\beta=1}^N \lambda_{\alpha\alpha} \frac{1}{k^2} (1 + \Pi(k^2))_{\alpha\beta}^{-1} \lambda_{\beta b}^* = \delta_{ab} \quad (\alpha, \beta \leq N) \\ \sum_{\alpha\beta=N+1}^{d(G)} \lambda_{\alpha\alpha} \frac{1}{k^2} (1 + \Pi(k^2))_{\alpha\beta}^{-1} \lambda_{\beta b}^* = 0 \quad (\alpha, \beta > N)$$

che è equivalente a :

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\lambda_{\alpha\alpha} \lambda_{\alpha b}^*}{\mu_\alpha^2} = - \delta_{ab} \quad (22 a)$$

$$\sum_{\alpha=N+1}^{d(G)} \lambda_{\alpha\alpha} \lambda_{\alpha b}^* = 0 \quad (22 \text{ b})$$

Le condizioni (21) e (22) assieme danno $m = N$ e $\lambda_{\alpha\alpha}(0) = 0$ per α tale che $\mu_\alpha = 0$.

La ampiezza totale di diffusione diviene in conclusione :

$$T_{AB}(s=k^2, \dots) = \sum_{\alpha=N+1}^{d(G)} T_{A\alpha}^{\mu(\text{reg.})}(k, \dots) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \delta_{\alpha\beta} T_{B\beta}^{*\nu(\text{reg.})}(k, \dots)$$

cosicchè gli unici poli presenti per $k^2 = 0$ sono quelli associati ai mesoni vettori fisici a massa zero.

2) Relazioni tra le masse

In questo paragrafo vengono analizzati i vincoli sulla forma delle masse asimmetriche imposti dalle identità di Ward.

La identità di Ward per il vertice vettoriale in approssimazione polo e per piccole costanti di accoppiamento diviene (si vedano le eq. (12), (17) e (18) : (per p^2 piccolo) :

$$\lambda_{\alpha a}(0) P_{\lambda \sigma a}^T(p^2) \cong C_{\alpha \lambda \sigma} (\mu_\lambda^2 - \mu_\sigma^2) \quad (23)$$

Risulta utile separare gli indici di gruppo per particelle massicce e particelle a massa zero. Si ottiene quindi :

$$C_{\alpha \lambda \sigma} (\mu_\lambda^2 - \mu_\sigma^2) = 0 \quad \text{per } \mu_\alpha^2 = 0 \quad (24a)$$

$$(\lambda_{\alpha a})^{-1} C_{\alpha \lambda \sigma} (\mu_\lambda^2 - \mu_\sigma^2) = P_{\lambda \sigma a}^T(p^2) \quad \text{per } \mu_\alpha^2 \neq 0 \quad (24b)$$

Un semplice esempio è dato dal gruppo SU(2). Assumendo $\mu_3 = 0$ si ha $(C_{\alpha \beta \gamma} = \varepsilon_{\alpha \beta \gamma}) \quad \mu_1 = \mu_2$. In generale il sottogruppo che contiene le particelle a massa zero è ancora composto di campi a massa zero ed è un sottogruppo di Lie semplice e compatto²⁶.

La identità di Ward vettoriale in questa approssimazione, afferma che l'accoppiamento tra bosoni di Goldstone e due vettori è determinato in approssimazione polo (e accoppiamento debole) dalle masse dei bosoni vettoriali.

Ulteriori vincoli sulle masse bosoniche si ottengono considerando la identità di Ward fermionica. Dalla identità (15) si ha, usando la (16) :

$$\lambda_{\alpha a}(0) P_a^F(p) = t^\alpha \Sigma(p) - \Sigma(p) \gamma^0 t^\alpha \gamma^0$$

Introduciamo la matrice U che diagonalizza la matrice di massa $\mu_{\alpha\beta}^2$.

$$U_{\alpha\alpha'} \lambda_{\alpha'a} \lambda_{a\beta'}^* U_{\beta'\beta}^+ = \delta_{\alpha\beta} \mu_\alpha^2 \quad (25)$$

Separando di nuovo indici corrispondenti a bosoni vettoriali massicci da un lato e a bosoni vettoriali a massa zero dall'altro, si ha :

$$0 = U_{\alpha\beta} t^\beta \Sigma(p) - \Sigma(p) \gamma^0 U_{\alpha\beta} t^\beta \gamma^0 \quad (26a)$$

($\mu_\alpha^2 = 0$)

$$U_{\alpha\beta} \lambda_{\beta\sigma} P_\sigma^F(p) = U_{\alpha\beta} t^\beta \Sigma(p) - \Sigma(p) \gamma^0 U_{\alpha\beta} t^\beta \gamma^0 \quad (26b)$$

($\mu_\alpha^2 \neq 0$)

La identità (26 a) afferma che i fermioni si trasformano come una rappresentazione del sotto-gruppo i cui generatori sono associati ai mesoni vettori a massa zero, con matrici date da $\tilde{t}^\alpha = U^\alpha_{\beta} t^\beta$. Inoltre, come nel caso abeliano, la (26 b) con indici corrispondenti a mesoni vettori massicci, fornisce un legame tra la autoenergia fermionica (o meglio la sua parte asimmetrica) e il fattore di forma che descrive l'accoppiamento bosone di Goldstone - due fermioni.

E' utile a questo punto confrontare le relazioni ottenute con le relazioni analoghe in teorie di Higgs usuali, cioè con mesoni scalari introdotti con lo scopo di rompere spontaneamente la simmetria. In questo caso la Lagrangiana è data da :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & - \bar{\Psi} (-i \gamma^\mu \partial_\mu + g_\alpha t_F^\alpha \gamma^\mu A_{\mu\alpha} + m_0) \Psi \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\mu\nu}_\alpha \\ & + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \delta_{ij} + i g_\alpha t_s^\alpha{}_{ij} A_{\mu\alpha}) \phi_j] + \bar{\Psi} \Gamma^i \Psi \phi_i - V(\phi) \end{aligned} \quad (27)$$

dove t_s^α è la matrice di rappresentazione dei campi scalari ed è tale che :

$$[t_s^\alpha, t_s^\beta] = i C^{\alpha\beta}{}_\gamma t_s^\gamma$$

(le Γ_i sono matrici di accoppiamento di Yukawa). $V(\phi)$ è un polinomio quartico nei campi scalari minimizzato da $\phi = v$. La simmetria di gauge della Lagrangiana richiede che sia :

$$[t_F^\alpha, \gamma^0 \Gamma_i] = i \gamma^0 t_s^\alpha{}_{ij} \Gamma^j \quad (28)$$

La massa dei mesoni vettoriali all'ordine più basso è data da ⁴⁷ :

$$\mu_{\alpha\beta}^2 = g_\alpha g_\beta (v, t_s^\alpha t_s^\beta v) \quad (29)$$

Dal confronto con la (20) ne inferiamo che possiamo identificare $\lambda_{\alpha a}$ con $g_\alpha (t_s^\alpha v)_a$ nel caso di Higgs. Dalla (28) inoltre con la identificazione $P_{T_i}^{\alpha\beta} (0) \leftrightarrow \frac{1}{2} (v_e t_{ej}^\beta t_{ij}^\alpha + t_{ij}^\alpha t_{ej}^\beta v_e)$ si ottiene la equazione (23). Infine dalla equazione (28), identi-

ficando $P_F^j(m_0^2)$ con Γ^j e $\Gamma^i v_i = M - m_0$ (matrice di massa fermionica) con $\sum_{(p=m_0)}$, si ottiene la relazione (25) per $p = m_0$. La situazione è riassunta nella tabella a).

teorie dinamicamente rotte teorie di Higgs

$\lambda_{\alpha a}(0)$	$g_\alpha (t_s^\alpha v)_a$
$P_{T_i}^{\alpha\beta}(0)$	$\frac{1}{2} (v_e t_{e_j}^\beta t_{i_j}^\alpha + t_{i_j}^\beta t_{e_j}^\alpha v_e)$
$P_{F_i}(0)$	Γ_i
$\sum_{(p=0)}$	$\Gamma^i v_i$

E' quindi chiaro a questo punto che esiste una diretta analogia tra le relazioni tra le masse ottenute all'ordine zero in teorie di Higgs e le relazioni ottenute per le masse generate dinamicamente in approssimazione polo. Ambedue i tipi di relazioni derivano dalle identità di Ward della teoria.

Esiste inoltre una corrispondenza biunivoca tra i parametri liberi nei modelli di Higgs (Γ_i, v) e le corrispondenti quantità dinamiche (λ, P) nella teoria precedentemente illustrata. La differenza sostanziale risiede però nel fatto che quantità come $\lambda_{\alpha a}$ e P_{F_i} o $P_{T_i}^{\alpha\beta}$ sono calcolabili (almeno in via di principio) nella teoria dinamicamente rotta. Il calcolo di queste quantità verrà effettuato nel paragrafo successivo in un particolare schema di approssimazione.

$$\lambda_{\alpha\sigma}(0) g^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left\{ \begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ \text{diagram 2} \\ \text{diagram 3} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} k=0 \\ g \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

fig.16 La espressione finale per la matrice che descrive l'accoppiamento tra i mesoni vettoriali e i bosoni di Goldstone .

3) Soluzione delle equazioni integrali nel limite di accoppiamento debole. (Rottura dinamica della simmetria di tipo A)

In questo paragrafo si noterà che esistono soluzioni nonbanali per le quantità-asimmetriche $\lambda_{\alpha\alpha}(0)$ e $\Sigma(p)$ e per i fattori di forma relativi all'accoppiamento bosone di Goldstone - due bosoni vettoriali ($P_V^{\mu\nu}(k,p+k)$), bosone di Goldstone - due fermioni ($P_F(k,p+k)$) e bosone di Goldstone - due ghosts ($P_G(k,p+k)$). Lo schema di approssimazione è già stato illustrato a pag. 45 del cap. III. Il calcolo viene effettuato all'ordine più basso eccetto che per i propagatori, che vengono presi nella loro forma libera ma con le masse nonperturbative, e vengono trattati come oggetti di ordine g^0 . La consistenza dello schema richiede che le masse vadano a zero per $g \rightarrow 0$.

Le masse dei bosoni vettoriali in approssimazione polo si calcolano dalla fig. 13. La equazione per $\lambda_{\alpha\alpha}(0)$ è data diagrammaticamente dalla fig. 16 ed è ottenuta dalla equazione della fig. 13 per derivazione rispetto a K e ponendopoi $k = 0$. La equazione per $\lambda_{\alpha\alpha}(0)$, come è scritta nella fig. 16 presenta due problemi: 1) come nel caso abeliano, essa è afflitta da divergenze sovrappoentesi e non è quindi ovviamente invariante per rinormalizzazione. Anche qui con lunghi calcoli si può mostrare che la equazione illustrata nella fig. 16 è effettivamente invariante per rinormalizzazione^{26,29}; 2) La equazione per $\lambda_{\alpha\alpha}(p)$ coinvolge derivate dei fattori di forma. Anche questa difficoltà può venire aggirata in modo analogo al caso abeliano: è possibile porre l'espressione per $\lambda_{\alpha\alpha}$ in una forma tale che non coinvolga più derivate dei vertici di Goldstone.

Nel calcolo successivo verranno inoltre ignorati i vertici bosone di Goldstone - tre bosoni vettori e i vertici nudi a quattro bosoni vettori in quanto sono di ordine superiore nelle costanti di accoppiamento.

Dalle equazioni integrali per le funzioni di vertice (v. Appendice B) si deduce il seguente sistema di equazioni integrali per i fattori di forma $\{P\}$, ottenuto uguagliando i termini singolari per $k^2 \rightarrow 0$ nelle equazioni di Dyson complete:

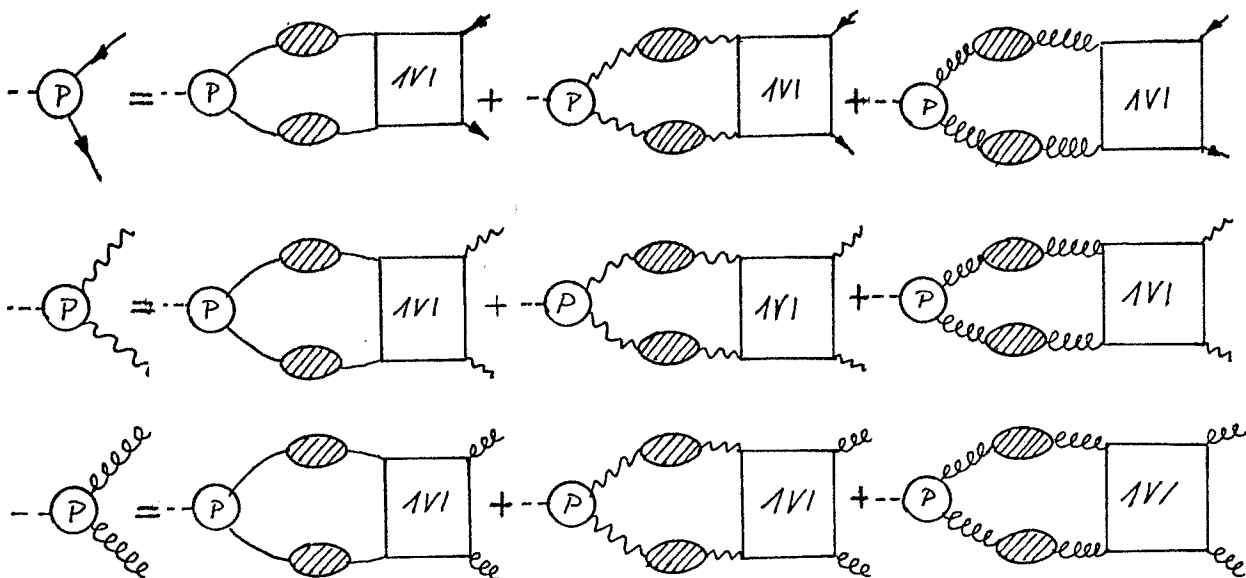


fig.17 Il sistema di equazioni integrali accoppiate per i tre fattori di forma P_V , P_G e P_F .

Esplicitamente questo insieme di equazioni integrali omogenee accoppiate è dato da :

$$P_V^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}(p, -k+p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[K_{VV\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu\gamma\delta}(p, -k+p, q, -k+p) D_{F\gamma\delta'}^{\sigma\sigma'}(q) D_{F\delta\delta'}^{\sigma\sigma'}(q-k) P_{V\gamma'\delta'}^{\sigma'\sigma'}(q, q-k) \right. \\ \left. - K_{VG\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu}(p, p-k, q, q-k) G_{F\gamma\delta'}(q) G_{F\delta\delta'}(q-k) P_{G\gamma'\delta'}(q, q-k) \right. \\ \left. - K_{VF\alpha\beta}^{\mu\nu}(p, p-k, q, q-k) S_F(q) P_F(q, q-k) S_F(q-k) \right] \quad (30a)$$

$$P_G{}_{\alpha\beta}(p, p-k) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} K_{GV\alpha\beta\gamma\delta}^{\sigma\sigma}(p, p-k, q, q-k) D_{F\gamma\delta'}^{\sigma\sigma'}(q) D_{F\delta\delta'}^{\sigma\sigma'}(q-k) P_{V\gamma'\delta'}^{\sigma'\sigma'}(q, q-k) \right. \\ \left. - K_{GG\alpha\beta\gamma\delta}(p, p-k, q, q-k) G_{F\gamma\delta'}(q) G_{F\delta\delta'}(q-k) P_{G\gamma'\delta'}(q, q-k) \right. \\ \left. - K_{GF\alpha\beta}(p, p-k, q, q-k) S_F(q) P_F(q, q-k) S_F(q-k) \right] \quad (30b)$$

$$P_F(p, p-k) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{2} K_{GV\alpha\beta\gamma\delta}^{\sigma\sigma}(p, p-k, q, q-k) D_{F\gamma\delta'}^{\sigma\sigma'}(q) D_{F\delta\delta'}^{\sigma\sigma'}(k+q) P_{V\gamma'\delta'}^{\sigma'\sigma'}(q, q-k) \right. \\ \left. - K_{FG\gamma\delta}(p, p-k, q, q-k) G_{F\gamma\delta'}(q) G_{F\delta\delta'}(k+q) P_{G\gamma'\delta'}(q, q-k) \right. \\ \left. - K_{FF}(p, p-k, q, q-k) S_F(q) P_F(q, q-k) S_F(k+q) \right] \quad (30c)$$

L'obiettivo è ora di trovare soluzioni alle eq. (30a)-(30c) per $k \rightarrow 0$ nel limite di accoppiamento debole e per p^2 grande ($p^2 \gg \mu^2, m^2$) (m è all'ordine di una massa fermionica). I nuclei K_{ij} ($i, j = V, F, G$) all'ordine più basso (approssimazione a scala)

sono elencati nella Appendice C. Siccome i nuclei considerati (a parte una eccezione, v. avanti) non sono di Fredholm, le soluzioni esisteranno per un certo campo di variabilità delle costanti di accoppiamento e dipenderanno esplicitamente dalle stesse. A questo punto è necessario fare alcune osservazioni relative al problema della rinormalizzazione.

Come è stato mostrato in ²⁶ e ²⁹, le equazioni (12) e (15) non contengono divergenze ultraviolette nella teoria rinormalizzata (definita in base alla procedura illustrata nel cap. III par. 7). I controtermini usati sono naturalmente quelli della teoria simmetrica. La assunzione di violazione della simmetria non dà luogo a infiniti controtermini asimmetrici. Inoltre le equazioni (30 a) (30 b) (30 c) (equazioni per i vertici P) e la equazione espressa dalla fig. (16) (equazione per $\lambda_{\alpha\alpha}(0)$) sono invarianti per rinormalizzazione, come si vede con lunghi calcoli.

Mentre la procedura di rinormalizzazione porta a risultati finiti nella teoria simmetrica, nella teoria dinamicamente rotta questa circostanza non è automaticamente garantita. Qui resta da dimostrare che i termini che rompono la simmetria non introducono nuove divergenze. Quindi una teoria con rottura dinamica della simmetria è rinormalizzabile se e solo se le equazioni integrali (30 a) (30 b) (30 c) o la equazione (32) possiedono soluzioni finite non banali.

Conviene separare i vertici di Goldstone { P } secondo le loro proprietà di simmetria negli indici di isospin :

$$P_{T\alpha\beta}(k) = \frac{1}{2} P_{T\{\alpha,\beta\}}^S + \frac{1}{2} P_{T[\alpha,\beta]}^A \quad (31a)$$

$$P_{G\alpha\beta}(k) = \frac{1}{2} P_{G\{\alpha,\beta\}}^S + \frac{1}{2} P_{G[\alpha,\beta]}^A \quad (31b)$$

e nel caso del vertice fermionico :

$$P_F(k) = \frac{\kappa}{k^2} P_F^A(k^2) + P_F^B(k^2), \quad (31c)$$

e tenendo presente la relazione

$$P_{\nu\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = (g^{\mu\nu} - \kappa^\mu \kappa^\nu / \kappa^2) P_{T\alpha\beta}(k).$$

Si ponga ora:

$$P_{T\{\alpha,\beta\}}^S(\kappa^2) = P_1(\kappa^2) \quad P_{T[\alpha,\beta]}^A(\kappa^2) = P_0(\kappa^2)$$

$$P_{G\{\alpha,\beta\}}^S(\kappa^2) = P_2(\kappa^2) \quad P_{G[\alpha,\beta]}^A(\kappa^2) = 2P_3(\kappa^2)$$

$$P_{Fa}^A(\kappa^2) = P_4(\kappa^2) \quad P_{Fa}^B(\kappa^2) = P_5(\kappa^2)$$

Ruotando le variabili di integrazione nel piano euclideo, effettuando le integrazioni angolari ed introducendo la variabile adimensionale $x = (\frac{q^2}{p^2})$ si ottiene (nel gauge di Landau) il sistema di equazioni (linearizzate) :

$$P_i(p^2) = \sum_{j=0}^5 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} f_{ij}(x, \frac{\mu^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, g) P_j(xp^2) \quad (32)$$

I nuclei f_{ij} sono elencati nella appendice C.

Ricercando soluzioni asintotiche (ammesso che esistano) si può porre in prima approssimazione :

$$f_{ij}(x, \frac{\mu^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, g) = f_{ij}(x, 0, 0, g) \quad (33)$$

e i termini $0(\frac{\mu^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2})$ verranno utilizzati qualora essi diano contributi rilevanti in alcuni nuclei.

Distinguiamo ora due casi : teoria di Yang Mills pura e (più avanti) la teoria con l'inclusione dei fermioni.

Dai nuclei si ottiene che in una teoria di Yang Mills pura l'unica soluzione consistente con le assunzioni è che $P_T^A = P_T^S = 0$ asintoticamente. Questo avviene perchè le equazioni integrali contenenti P_T non sono asintoticamente dominate. Tuttavia generazione della massa è possibile se si considera $P_T^{IA}(p) = \frac{\partial P_T^A}{\partial \kappa \cdot p} |_{\kappa \cdot p = 0}$ che è non nullo. Questo è dovuto al fatto che parti singolari del vertice di Goldstone possono venire determinate fino a parti lineari nel momento del bosone scalare legato (si veda lo sviluppo a pag. 34) :

$$g \lambda_{\alpha\sigma}(\kappa^2) \frac{1}{\kappa^2} P_T(\kappa, p)_{\text{polo}} =$$

$$= g \lambda_{\alpha\sigma}(0) \frac{1}{k^2} \left[P_T(k^2=0, k \cdot p=0, p^2) + k \cdot p \frac{\partial}{\partial k \cdot p} P_T(k^2=0, k \cdot p, p^2) \Big|_{k \cdot p=0} \right] \quad (34)$$

ed è quindi consistente che $P^T = 0$ e che tuttavia $\frac{\partial P_T}{\partial k \cdot p} \Big|_{k \cdot p=0} \neq 0$

asintoticamente. Si noti che un vertice lineare in $k \cdot p$ deve essere antisimmetrico in α, β (se è simmetrico in μ, ν) per simmetria di Bose.

In effetti la equazione di Bethe-Salpeter a cui soddisfa $P_{T[\alpha, \beta]}^1(p^2)$ è data da (la si ottiene sviluppando anche K in potenze di $k \cdot p$ ed uguagliando i contributi in $(k \cdot p)^1$ dopo avere inserito k nella eq. (30 a)) :

$$\begin{aligned} 3 P_{T[\alpha, \beta]}^1 \left(\frac{p^2}{m^2} \right) &= \frac{g^2}{16 \pi^2} (C_{\alpha\beta\lambda} C_{\gamma\delta\lambda}) \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left\{ \left[\left(3 + \frac{25}{4x} - \frac{3}{4x^2} \right) \theta(x-1) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(3 + \frac{25}{4} x - \frac{3}{4} x^2 \right) x \theta(1-x) \right] P_{T[\gamma, \delta]}^1 \left(\frac{x p^2}{m^2} \right) + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} \right) \theta(x-1) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} x \right) x^2 \theta(1-x) \right] P_{G[\gamma, \delta]}^1 \left(\frac{x p^2}{m^2} \right) + \frac{1}{x p^2} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x} \right) \theta(x-1) - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} \right) \theta(1-x) \right] \right. \\ &\left. \cdot P_{G[\gamma, \delta]} \left(\frac{x p^2}{m^2} \right) \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

Per risolvere questa equazione è necessaria la conoscenza di P_G e P_G^1 . Il vertice ghost-bosone di Goldstone tuttavia soddisfa alla semplice equazione (all'ordine zero in $k \cdot p$) :

$$P_{G[\alpha, \beta]} \left(\frac{p^2}{m^2} \right) = \frac{g^2}{16 \pi^2} \frac{3}{8} C_{\alpha\beta\lambda} C_{\gamma\delta\lambda} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left[\frac{1}{x} \theta(x-1) + x \theta(1-x) \right] P_{G[\gamma, \delta]} \left(\frac{x p^2}{m^2} \right) \quad (36)$$

la cui soluzione si trova facilmente convertendola nella equazione differenziale :

$$\frac{d}{dy} \left(y^3 \frac{d}{dy} \frac{P_{G[\alpha, \beta]}(y)}{y} \right) = - \frac{2 g^2}{16 \pi^2} \cdot \frac{3}{8} C_{\alpha\beta\lambda} C_{\gamma\delta\lambda} P_{G[\alpha, \beta]}(y)$$

che ammette la soluzione :

$$P_{G[\alpha, \beta]} \left(\frac{p^2}{m^2} \right) = X_{\alpha, \beta} \left(\frac{p^2}{m^2} \right)^\lambda$$

dove λ è determinato dagli autovalori della equazione :

$$\det \left[\frac{2g^2}{16\pi^2} \frac{3}{8} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\lambda\delta\epsilon} - \lambda(\lambda+2)(\delta_{\alpha}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\epsilon} - \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\gamma}) \right] = 0$$

e si ha (scegliendo l'autovalore più piccolo) :

$$C_{\alpha\beta\gamma} P'_{G[\alpha\beta]} a \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = A_{\alpha a} \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{\lambda} \quad (37)$$

$$\lambda = 1 - \frac{3}{8} g^2 \frac{1}{16\pi^2} C_2(G)$$

ove è $\delta_{\alpha\beta} C_2(G) =: C_{\alpha\gamma\delta} C_{\beta\gamma\delta}$. Il fatto che $\lambda \sim 1$ non presenta difficoltà in quanto $P'_{G[\alpha\beta]}(p)$ è sempre moltiplicato per un fattore $\frac{1}{p^2}$ nelle equazioni integrali. Dal corrispettivo (lineare in k.p) della equazione (36) si ha :

$$C_{\alpha\beta\gamma} P'_{G[\beta,\gamma]} a \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = -\frac{1}{m^2} A_{\alpha a} \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{-\frac{3}{8} \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(G)} \quad (38)$$

e dalla equazione (35) infine :

$$C_{\alpha\beta\gamma} P'_{T[\beta,\gamma]} a \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = \frac{2}{3} \frac{1}{m^2} A_{\alpha a} \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{-\frac{3}{8} \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(G)} \quad (39)$$

A questo punto le (37), (38) e (39) possono venire inserite nella equazione della fig. 16 per ottenere una espressione per $\lambda_{\alpha a}(0) |_{\text{bosoni}}$. Con la convenzione sulla circolazione dei momenti illustrata dalla figura 16 si ha (notare che vertici simmetrici in β, γ non danno contributo in questa approssimazione):

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \lambda_{\alpha a}(0) |_{\text{bosoni}} &= \lim_{n \rightarrow 4} \left\{ \int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \frac{3/2 P^\mu P^\nu C_{\alpha\beta\gamma}}{(p^2 - m^2_{\beta\gamma} + i\epsilon)(p^2 - m^2_{\gamma\beta} + i\epsilon)} P'_{T[\beta\gamma]} a \left(\frac{P^2}{m^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - g^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \frac{2 P^\mu P^\nu}{(p^2)^3} P_{G[\alpha,\gamma]} a \left(\frac{P^2}{m^2} \right) - g^2 \int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \frac{P^\mu P^\nu C_{\alpha\beta\gamma}}{(p^2)^2} P'_{G[\beta\gamma]} a \left(\frac{P^2}{m^2} \right) \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

Ogni termine della (40) è separatamente divergente per $n \rightarrow 4$. Le divergenze tuttavia si cancellano a vicenda fornendo una espressione finita per $\lambda_{\alpha a}(0)$ che però richiede la conoscenza di termini di ordine superiore in $\frac{M^2}{p^2}$, trascurati nella precedente approssimazione (si veda la posizione fatta nella (33)).

Quindi a differenza del caso abeliano (con rottura dinamica della simmetria di tipo A), qui importanti contributi finiti alla massa

bosonica provengono da parti non preponderanti nella regione asintotica dei vertici di Goldstone. E' tuttavia importante ribadire la circostanza che le masse dei mesoni vettoriali sono finite e, in via di principio, calcolabili.

La inclusione dei fermioni allarga il sistema di equazioni integrali, e si richiede quindi ora^{di} trovare soluzioni asintotiche consistenti per P_V , P_G e P_F . Dalla equazione (30 a) o (32) si ha ora che $P_{T\alpha\beta}(p^2)$ può non essere asintoticamente nullo per la presenza della interazione fermionica. Nella regione ultravioletta quindi $P_{T\alpha,\beta}(p^2)$ può venire calcolato approssimativamente da :

$$P_{T\alpha\beta}\left(\frac{p^2}{m^2}\right) = \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \left[2 \text{Tr}(t_\alpha P_{Fa}\left(x\frac{p^2}{m^2}\right) t_\beta M) - \text{Tr}\left(\frac{1}{2}\{t_\alpha, t_\beta\}\{M, P_{Fa}\left(x\frac{p^2}{m^2}\right)\}\right) \right] \quad (41)$$

dove M è la matrice di massa fermionica.

(I vertici $P_T(p^2)$ stesso e $P_G(p^2)$, presenti nella (30 a), fornisco no importanti contributi, per la natura dei rispettivi nuclei, solo nel dominio infrarosso (piccoli p^2) di $P_T(p^2)$). Tuttavia questo vertice non dà contributo alla massa bosonica per simmetria.

Utilizzando la decomposizione (31 c) per il vertice fermioni-bosone di Goldstone $P_F(k)$ e separando nella equazione integrale (30 c) i contributi proporzionali a γ^μ e $\mathbb{1}$ nello spazio degli spinori, si ottiene secondo la notazione della (32) $f_{44} = f_{45} = 0$ e quindi $P_{4a}(p^2) \equiv P_F^A(p^2) = 0$. La equazione per $P_F^B(p^2)$ è data invece da ($f_{54} = 0$) :

$$P_{Fa}^B\left(\frac{p^2}{m^2}\right) = \frac{3g^2}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} [\theta(x-1) + x\theta(1-x)] (\gamma^0 t^\alpha \gamma^0 P_{Fa}^B\left(x\frac{p^2}{m^2}\right) t_\alpha) \quad (42)$$

che è analoga alla equazione integrale (cap.III, eq.26) nel caso abeliano.

Le soluzioni della (42) vanno esaminate per ogni gruppo di Lie separatamente.

- 1) Bosoni di gauge vettoriali appartenenti ad un gruppo di Lie semplice.

La (42) diviene :

$$P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = \frac{3g_v^2}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} [\theta(x-1) + x\theta(1-x)] (t^\alpha P_{Fa}^B(x \frac{P^2}{m^2}) t_\alpha) \quad (43a)$$

Convertendo la (42 a) in una equazione differenziale si ottiene la soluzione :

$$P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = N_a \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{-\lambda} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (43b)$$

dove $\lambda = 3Ag_v^2/16\pi^2$ e A è dato da $t^\alpha N_a t_\alpha = AN_a, A > 0$
 Per fermioni nella rappresentazione fondamentale di SU(n) o O(n) si ha $A < 0$ (SU(n) : $A = -\frac{n}{2}$; O(n) : $A = -\frac{1}{2}$) e quindi in questo caso non si ha soluzione asintotica consistente nel limite di accoppiamento debole. Nella rappresentazione aggiunta si ha $A > 0$ e la soluzione (43 b) è possibile.

2) Bosoni vettoriali non-abeliani e un bosone vettore abeliano.

In questo caso si ha :

$$P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = \frac{3}{16\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} [\theta(x-1) + x\theta(1-x)] (g_v^2 t^\alpha P_{Fa}^B(x \frac{P^2}{m^2}) t_\alpha - g_A^2 P_{Fa}^B(x \frac{P^2}{m^2})) \quad (44a)$$

che ammette la soluzione :

$$P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = N_a \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{-\lambda} \quad (44b)$$

con $\lambda = \frac{3}{16\pi^2} (Ag_v^2 - g_A^2)$ con le condizioni $t^\alpha N_a t_\alpha = AN_a$,
 $A > 0$, e $Ag_v^2 - g_A^2 > 0$

3) SU(n) \otimes SU(m) chirale

t^α in questo caso è dato da :

$$t^\alpha = t_{V+A}^{\alpha_1} [1 + \gamma^5] \oplus t_{V-A}^{\alpha_2} [1 - \gamma^5]$$

e si ha quindi :

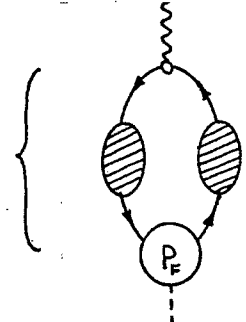
$$\begin{aligned} \gamma^0 t^\alpha \gamma^0 P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) t_\alpha &= t_{v+A}^{\alpha_1} [1-\gamma^5] P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) [1+\gamma^5] t_{v+A\alpha_1} \\ &+ t_{v-A}^{\alpha_2} [1+\gamma^5] P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) [1-\gamma^5] t_{v-A\alpha_2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

e le soluzioni per $P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right)$ non sono quindi dominate dal comportamento asintotico. Questo è dovuto alla natura non compatta dei nuclei integrali in teorie chirali, come già visto nel caso abeliano nel caso di gruppi chirali che conservano la parità.

Giunti a questo punto si può calcolare il contributo fermionico alle masse dei bosoni vettoriali. Nel caso di un gruppo semplice (caso 1) si ha (assumendo $A > 0$):

$$P_{Fa}^B \left(\frac{P^2}{m^2} \right) = N_a \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{- (3g_v^2/16\pi^2) A} \quad (46)$$

e quindi (si veda la figura 16):

$$\lambda_{\alpha a}(0)_{\text{fermioni}} = \frac{\partial}{\partial k_\nu} \left\{ \begin{array}{c} \text{diagramma} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} k=0 \\ g \rightarrow 0 \end{array}$$


The diagram shows a fermion loop with a boson external line at the top and a fermion self-energy insertion at the bottom. The loop is shaded with diagonal lines. The external boson line is labeled with a wavy line and a vertex. The fermion self-energy insertion is labeled with a circle containing 'F' and a vertical line below it. The diagram is enclosed in large curly braces.

che scritta esplicitamente è: $(\lambda = (3g_v^2/16\pi^2) A)$

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha a}(0)_{\text{fermioni}} &= 4g_v^2 \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} T_2 [t^\alpha N_a M] \frac{1}{(P^2)^2} \left(\frac{P^2}{m^2} \right)^{-\lambda} \\ &= -\frac{4}{3A} T_2 [t^\alpha M N_a] \end{aligned} \quad (47)$$

Si può a questo punto concludere che sono state derivate soluzioni che rompono dinamicamente la simmetria della Lagrangiana (1) e sono contemporaneamente consistenti con le identità di Ward della teoria, le equazioni di Bethe-Salpeter e le equazioni di Dyson. Nel limite di accoppiamento debole si ottengono soluzioni ac-

cettabili, a patto che le matrici della rappresentazione spinoriale soddisfino a certi vincoli algebrici. Resta ancora aperto qui, come nel caso abeliano, il problema della indipendenza del gauge delle soluzioni ottenute. Inoltre non è stato calcolato il contributo alla massa del mesone vettore dovuto alla autointerazione del campo vettoriale di Yang-Mills. Infine resta aperto il problema del calcolo dei contributi di ordine superiore nella costante di accoppiamento. Si tratta in questo caso di sviluppare uno schema perturbativo analogo alla approssimazione "a piattaforma" suggerita da Cornwall e Norton ²⁴ (si veda la discussione a pag. 48 del cap. III).

4) Rottura dinamica della simmetria di tipo B

Nel contesto dei modelli non abeliani descritti dalla Lagrangiana (1) è stata anche studiata la possibilità di una rottura dinamica della simmetria di tipo B, dove, come illustrato nel paragrafo 8 del III° capitolo, la generazione della massa avviene nella regione di piccoli momenti ($p^2 \ll m^2, \mu^2$). Si è visto nel paragrafo precedente come già nella teoria con generazione ultravioletta della massa le regioni infrarosse nel dominio di integrazione delle equazioni integrali per P_T^S e P_T^A rivendichino la propria importanza. È stato infatti necessario porre $P_T^S = P_T^A = 0$ asintoticamente per ottenere consistenza con le ipotesi fatte nello schema di approssimazione.

Si può in effetti dimostrare che, sotto opportune ipotesi, una rottura dinamica della simmetria di tipo B risulta consistente in teorie di Yang-Mills senza fermioni, e probabilmente anche in presenza degli stessi ²⁹. La assunzione cruciale che si deve anteporre per ottenere una teoria di tipo B è che 1) non vi sia accoppiamento ghost-ghost-bosone di Goldstone e quindi nessun contributo del ghost in $\overline{\Pi}_{\alpha\beta}(0)$; 2) che non vi siano correzioni radiative al propagatore del ghost, che è una ipotesi consistente con la prima. Senza queste due assunzioni, che non impediscono la derivazione di una teoria consistente, non appare possibile una rottura dinamica della simmetria originata nell'infrarosso. Accettate queste ipotesi, si ha che i fattori di forma $P_i(p^2)$ (usando la notazione del

paragrafo precedente) soddisfano ad una equazione del tipo (in approssimazione a scala) :

$$P_i(p^2) = \int d^4 p' K_{ij}(p^2, p'^2, P_j(p'^2)) G(p'^2) P_j(p'^2) \quad (48)$$

con (i momenti si intendono euclidei) :

$$\text{Tr} \iint d^4 p d^4 p' K_{ij}^2(p^2, p'^2, P_j(p'^2)) G(p^2) G(p'^2) < \infty \quad (49)$$

cioè con un nucleo K_{ij} di Fredholm. La presenza di un nucleo limitato nella equazione (48) dà luogo ad una condizione agli autovalori sulla costante di accoppiamento rinormalizzata, come già illustrato nel cap. III. Questa situazione sembra persistere anche quando si considera la teoria completa (cioè non in approssimazione a scala). In ogni caso si ottengono vertici $P(p^2) \sim \frac{1}{p^2}$ o più per $p^2 \gg m^2, \mu^2$.

In caso di rottura dinamica della simmetria di tipo B appare anche la possibilità di generazione di masse in Lagrangiane chirali, dove ogni campo vettoriale si accoppia a fermioni di chiralità definita. Come visto nel precedente paragrafo, una comunicazione asintotica tra spinori destrorsi e sinistrorsi non è possibile in teorie di gauge non abeliane, come per altro era da attendersi dopo la discussione nel paragrafo 8 del capitolo III. Tuttavia nella regione di piccoli momenti è possibile anche qui il meccanismo di "bootstrap" per la generazione della massa fermionica.

5) Interazioni deboli ed elettromagnetiche senza campi scalari

Recentemente è stata avanzata l'ipotesi che si possa costruire un modello per le interazioni deboli ed elettromagnetiche del tipo di Weinberg-Salam, ma senza fare uso di campi scalari²⁵. Motivazioni estetiche portano a proporre un modello nel quale tutte le interazioni derivano da un semplice principio unificante, la invarianza di gauge locale. In questo paragrafo si presenteranno alcune conclusioni riguardo a modelli atti a descrivere le interazioni deboli ed elettromagnetiche in cui la rottura spontanea della simmetria, e

quindi la generazione delle masse, avviene dinamicamente. Risulta opportuno a questo punto richiamare quelle che sono le caratteristiche del modello di Weinberg-Salam per i leptoni e le informazioni che questo modello fornisce sullo spettro delle masse relative alle particelle fisiche⁴. Il gruppo di gauge è $SU(2)_L \times U(1)$ e la costante di accoppiamento del tripletto dei campi di gauge è chiamata g , quella del singoletto g' . I mesoni scalari a massa zero formano un doppietto e la loro Lagrangiana contiene un termine di massa con segno negativo, che dà luogo a una rottura spontanea della simmetria. Per la presenza della simmetria nella Lagrangiana è possibile fare acquisire un valore di aspettazione di vuoto non nullo ad uno solo dei due campi, ed è possibile scegliere questo valore di aspettazione di vuoto, che verrà chiamato $\langle \varphi \rangle$, reale.

Dopo la rottura spontanea della simmetria sono presenti un fotone a massa zero con accoppiamento alla corrente elettromagnetica dato da $e^2 = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2}$, due bosoni vettoriali W_{\pm} carichi (identificati con i bosoni vettoriali intermedi delle interazioni deboli) con masse $m_{W^{\pm}}^2 = \frac{1}{4} g^2 \langle \varphi \rangle^2$ e un bosone vettoriale neutro con massa $m_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) \langle \varphi \rangle^2$. E' presente anche un campo scalare, che è l'unico superstite del doppietto complesso originale e la cui massa non è determinata dalle altre masse presenti nella teoria. Infine compare un elettrone massiccio, con massa $m_e^2 = \frac{1}{2} G_e^2 \langle \varphi \rangle^2$, dove G_e indica la costante di accoppiamento tra scalari e fermioni, e un neutrino che resta a massa zero. Il confronto con la costante di accoppiamento debole della teoria V-A di Feynman e Gell-Mann dà per la massa del W un valore elevato: $m_W \approx \frac{38}{\sin \theta_w} \text{ Gev}$ con $\theta_w = \arctg \frac{g'}{g}$ e quindi $m_e/m_W \gg 10^{-5}$.

Il primo risultato che si presenta nel modello di Weinberg-Salam senza campi scalari, studiato con l'equazione di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala, è che il rapporto $m/M \sim 1$ (m : massa leptonica, M massa mesonica). Infatti si assuma come prototipo il modello descritto dalla Lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ws}(x) = & \bar{R} i \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + i g' B_{\mu}) R \\ & + \bar{L} i \gamma^{\mu} (\partial_{\mu} + \frac{i}{2} g' B_{\mu} - \frac{i}{2} g T_i A_{\mu}^i) L - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (50)$$

con simmetria $SU(2)_L \times U(1)$. Questo modello dà luogo a rottura dinamica della simmetria di tipo A (B_μ si accoppia sia agli elettroni L che R). Tutto a questo punto procede secondo le linee tracciate nelle precedenti discussioni generali : in presenza di massa elettronica i bosoni vettoriali W_μ^\pm e Z_μ acquistano massa, mentre il ν e $A_\mu = \frac{g'A_\mu^3 - gB_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ restano a massa zero. In approssimazione a scala la parte asimmetrica della inserzione di autoenergia fermionica è della forma $\sum_{AS}(p^2) = A \cdot m \cdot \left(\frac{-p^2}{m^2}\right)^{-\epsilon}$ ($-p^2 \gg m^2$) con $\epsilon = 3g'^2/32\pi^2$ e $A = 1 + O(g^2, g'^2)$; non dipende quindi da g , che caratterizza l'intensità di una interazione L - L che non dà luogo a generazione spontanea di massa. Il calcolo del tensore di polarizzazione per $q^2 \sim 0$ fornisce

$$\mu_z^2 = \frac{m^2}{6g'^2} (g^2 + g'^2)$$

$$\mu_{W^\pm}^2 = \frac{m^2}{6g'^2} g^2$$

Si ha che per $g^2 \sim g'^2 \frac{m}{M} \sim 1$ e se invece si assume $g^2 \gg g'^2$ per ottenere $M \gg m$, si ha dalla relazione $e^2 = g^2 g'^2 / (g^2 + g'^2)$ $G_W \sim \frac{e^2}{m^2}$, che è (in questa approssimazione) in contraddizione con la osservazione sperimentale che da : $G_W \sim 10^{-10} \frac{e^2}{m^2}$.

In conclusione il modello di Weinberg-Salam senza campi scalari è poco realistico. M può venire reso più grande se si riesce a rendere più lenta la decrescita di $\sum_2(p^2)$ (si veda la eq. (20) del cap. III per M e la (47) del cap. IV per $\lambda_{\alpha\alpha}(0)$). Questo effetto lo si può ottenere diminuendo la comunicazione $L \leftrightarrow R$ a favore di quella $L \leftrightarrow L$ e $R \leftrightarrow R$. (Infatti un accoppiamento $L \leftrightarrow R$ intenso incentiva la generazione di massa fermionica mentre un accoppiamento $R \leftrightarrow R$ o $L \leftrightarrow L$ intenso non contribuisce alla medesima, almeno in prima approssimazione, come si è visto sopra (ϵ non dipende da g), mentre contribuisce alla massa bosonica come si vede dalla espressione per μ_z^2 e $\mu_{W^\pm}^2$).

A questo scopo viene introdotta da Englert e Brout la coppia di leptoni (ν_μ, μ^-) = L' e il singoletto $\mu^-_R = R'$. Tuttavia il gruppo di simmetria da loro scelto non è più $SU(2)_L \times U(1)$ bensì un gruppo di struttura più complicata ($SU(2)_{L+L'} \otimes U(1)_{L+R'} \otimes U(1)_{L+R}$). Si

assume ancora che la corrente elettromagnetica resti conservata con $Q = T_3 - \frac{Y}{2}$, $Y = N_L + N_{L'} + 2(N_R + N_{R'})$. La parte di interazione della Lagrangiana viene decomposta in una parte senza comunicazione $L \leftrightarrow R$ e in una parte con accoppiamento $L \leftrightarrow R$ il cui peso è caratterizzato da un parametro ξ :

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{R} i \gamma^\mu \partial_\mu R + \bar{R}' i \gamma^\mu \partial_\mu R' + \bar{L} i \gamma^\mu \partial_\mu L + \bar{L}' i \gamma^\mu \partial_\mu L'$$

$$\mathcal{L}_I(x) = \frac{g}{2} [\bar{L} \gamma^\mu \tau_i L + \bar{L}' \gamma^\mu \tau_i L'] A_\mu^i$$

$$+ \sqrt{2} g' [\frac{1}{2} \bar{L} \gamma^\mu L + \bar{R}' \gamma^\mu R'] X_\mu$$

$$+ \sqrt{2} g' [\frac{1}{2} \bar{L}' \gamma^\mu L' + \bar{R} \gamma^\mu R] Y_\mu$$

$$\mathcal{L}_\xi(x) = \sqrt{2} g' \xi^2 \left\{ [\bar{L}' \gamma^\mu L' + \bar{R}' \gamma^\mu R' - \bar{L} \gamma^\mu L - \bar{R} \gamma^\mu R] X_\mu \right. \\ \left. + [\bar{L} \gamma^\mu L + \bar{R} \gamma^\mu R - \bar{L}' \gamma^\mu L' - \bar{R}' \gamma^\mu R'] Y_\mu \right\}$$

Generazione spontanea della massa è possibile anche per $\xi \rightarrow 0$. Il fotone $A^\mu = [g' A_3^\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} (X^\mu + Y^\mu)] (g^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}}$ resta a massa zero e sono presenti due mesoni massicci Z_1^μ e Z_2^μ . Ripetendo le assunzioni e i ragionamenti fatti precedentemente, per $\xi \sim 10^{-3}$ e $g/g' \sim 1$ e prendendo per m_μ / m_e il valore sperimentale, si ha che $G_W \sim \frac{10^{-5}}{m_p^2}$ e per le masse mesoniche $10 \leq \mu \leq 100$ Gev.

Si può infine osservare che la Lagrangiana (2) è invariante per $SU(2)_{L+R} \otimes Y_L \otimes Y_R$ ($\tilde{R} = (\mu_R^+, -\bar{\nu}_\mu)$ e $\tilde{L} = \mu_L^+$) che è un sottoprodotto di $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ ove il tripletto sinistrorso $(\mu_L^+, \nu_e, \bar{e}_L)$ appartiene alla rappresentazione (3) e $(\bar{e}_R, \bar{\nu}_\mu, \mu_R^+)$ alla $(\bar{3})$. Il parametro ξ potrebbe essere legato, nella visione degli autori, alla violazione di C P.

APPENDICE A

Derivazione delle identità di Ward-Takahashi

Le identità di Ward vengono derivate usando il metodo dell'integrale funzionale di Fadeev-Popov (Per una discussione più approfondita e per maggiori dettagli si veda l'articolo di Lee e Zinn-Justin ¹, l'articolo di rassegna di Abers e Lee ⁴⁷ e l'appendice al lavoro di Eichten e Feinberg ²⁶). Si definisce quindi il funzionale generatore $Z [J_\mu^a, \eta, \bar{\eta}]$ delle funzioni di Green connesse (in gauge covarianti) :

$$e^{Z [J_\mu^a, \eta, \bar{\eta}]} = \int [dA_\mu^a] \Delta [A_\mu^a] [d\psi] [d\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J_\mu^a A_\mu^a \right] \right\} \quad (A1)$$

dove $[dA_\mu^a]$, $[d\psi]$ e $[d\bar{\psi}]$ sono le metriche funzionali per il campo vettoriale e i campi fermionici rispettivamente. Per esempio :

$$[dA_\mu^a] = \prod_{a, \mu, x} dA_\mu^a(x)$$

dove a è un indice di simmetria interna. $\mathcal{L}(x)$ è la Lagrangiana per i campi di Yang-Mills :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^{a} - i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \quad [t^a, t^b] = i C_{ab}^c t^c$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad D_\mu = \partial_\mu + ig t^a A_{a\mu} \quad (A2)$$

che è invariante per le trasformazioni infinitesime :

$$\delta \psi = -ig t^a \psi \theta_a(x) \quad \delta A_\mu^a = g C_{ab}^c A_\mu^b \theta_c(x) + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta_a(x) \quad (A3)$$

Lo Jacobiano $\Delta [A_\mu^a]$ è essenzialmente il determinante dell'operatore $\partial_\mu D^\mu$ ove D^μ è la derivata covariante e può venire espresso come :

$$\Delta [A_\mu^a] = \exp \left[\text{Tr} \ln \left(1 - g \frac{1}{\partial^2} T_b \partial^\mu A_\mu^b \right) \right] \quad (A4)$$

dove $\{T^b\}$ sono le matrici della rappresentazione regolare del gruppo di simmetria locale : $(T^b)_{ac} =: C_{abc}$ e C_{abc} sono le sue costanti di struttura; $\frac{1}{\partial^2}$ è l'operatore (integrale) inverso relativo al d'Alambertiano. Si ha che $\Delta[A_\mu^a]$ può venire espresso in termini di campi scalari classici con statistica fermionica (campi di "ghost") :

$$\Delta[A_\mu^a] = \int [dc][dc^*] \exp(i \int d^4x c_\alpha^* [-\square_x \delta_{\alpha\beta} + g C_{\alpha\beta\gamma} \partial^\mu A_\mu^\gamma]) c_\beta \quad (A5)$$

(La derivata ∂_μ al secondo membro si intende applicata anche a $c_\beta(x)$). Interpretando l'esponente come azione relativa ai campi di ghost si ricavano le regole di Feynman per i ghosts illustrate nella figura 1, assieme a quelle che si inferiscono per gli altri campi della forma della Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$. Le funzioni di Green connesse per il campo $A_\mu^a(x)$ si ottengono per esempio come derivate funzionali di $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$:

$$i \frac{\delta^n Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y) \dots} \Big|_{\substack{J_\mu^a = J_\nu^b = \dots = 0 \\ \eta = \bar{\eta} = 0}} = (-i)^n \langle 0 | T A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \dots | 0 \rangle_c \quad (A6)$$

La invarianza della Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ per trasformazioni di gauge locali dà luogo ad una gerarchia di identità tra le funzioni di Green della teoria. Questo insieme di equazioni può venire espresso tramite una unica equazione soddisfatta dal funzionale generatore $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$. La (A1) si può innanzitutto riscrivere come :

$$W[J, \eta, \bar{\eta}] \equiv e^{Z[J, \eta, \bar{\eta}]} = \Delta \left[i \frac{\delta}{\delta J_\mu^a} \right] W_0[J, \eta, \bar{\eta}] \quad (A7)$$

con $W_0[J, \eta, \bar{\eta}]$ dato da :

$$W_0[J, \eta, \bar{\eta}] = \int [dA_\mu^a][d\psi][d\bar{\psi}] \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + J_\mu^a A_\mu^a \right] \right\} \quad (A8)$$

Per la invarianza della Lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ e della metrica $[dA_\mu^a]$ sotto le trasformazioni di gauge (2), si ha che, effettuando una

trasformazione infinitesima di questo tipo sulle variabili di integrazione nella (A6), solo i termini di sorgente e il termine gauge-fixing verranno modificati. In seguito ad un cambiamento di variabili il valore dell'integrale funzionale non viene modificato e si deve quindi avere $\delta W_0 = 0$ per un $\delta \omega_a$ che caratterizza la trasformazione infinitesima. Ponendo i termini lineari in $\delta \omega_a(x)$ uguali a zero si ha :

$$\left[g \left(\bar{\eta} t^a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta (\delta^0 t^a \delta^0) \frac{\delta}{\delta \eta} \right) + J_\mu^b (\delta_{ab} \partial^\mu - g C_{abc} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c}) + \frac{i}{\alpha} [G^{-1}]_{ab} (\partial^\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^b}) \right] W_0 = 0 \quad (A9)$$

dove:

$$[G^{-1}]_{ab} = (-\square_x \delta_{ab} + ig \partial^\mu C_{acb} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c} + i\varepsilon)$$

è l'inverso del propagatore del ghost "in un campo esterno J_μ^c ". $G_{ab}(x, y, A_\mu^a)$ è legato alla derivata covariante (nella rappresentazione regolare) dalla relazione :

$$\partial^\lambda D_\lambda [A_\mu]_{ab} G_{bc}(x, y; A_\mu) = \delta_{ac} \delta^4(x-y) \quad (A10)$$

e il propagatore vestito del ghost è dato da :

$$G_{ab}(x-y) = - \left\{ W_0^{-1} [J, \eta, \bar{\eta}] G_{ab}(x, y; i \frac{\delta}{\delta J}) W_0 [J, \eta, \bar{\eta}] \right\}_{J=\eta=\bar{\eta}=0}$$

Agendo sulla (A7) con $\int d^4 y \Delta [i \frac{\delta}{\delta J}] G [i \frac{\delta}{\delta J}]$ dopo alcune manipolazioni si ottiene la seguente identità (di Slavnov) :

$$\frac{i}{\alpha} \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu^a(x)} + g \int d^4 y \left[\bar{\eta}(y) t^b \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(y)} - \eta(y) (\delta^0 t^b \delta^0)^\top \frac{\delta}{\delta \eta(y)} \right] G_{ba}(x, y; i \frac{\delta}{\delta J}) W + \int d^4 y J_\nu^c(y) \left[\partial_y^\nu \delta_c^b - ig C_{cd}^b \frac{\delta}{\delta J_\nu^d(y)} \right] G_{ba}(x, y; i \frac{\delta}{\delta J}) W = 0 \quad (A11)$$

Risulta più utile tuttavia considerare la equazione per il funzionale generatore $\Gamma(\mathcal{Q}, \phi, \bar{\phi})$ delle funzioni di vertice proprie. Quest'ultimo può venire ottenuto da $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$ tramite una trasformazione di Legendre. Si definisce :

$$a_\mu^a = -i \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^a} \quad \phi = -i \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}} \quad \bar{\phi} = -i \frac{\delta Z}{\delta \eta}$$

$$\Gamma[a_\mu^a, \phi, \bar{\phi}] = Z[J, \eta, \bar{\eta}] - i \int d^4x [J_\mu^a a_\mu^a + \bar{\eta} \phi + \bar{\phi} \eta]$$

$$\Gamma^o[a_\mu^a, \phi, \bar{\phi}] = \Gamma - \frac{i}{2\alpha} \int d^4y [\partial_\mu a_\mu^a(y)]^2 \quad (A12)$$

Questa ultima posizione ha lo scopo di semplificare le equazioni che si ottengono in seguito. Le funzioni di vertice proprie in presenza di campi classici esterni $\Gamma^{(n)}$, denotati genericamente con φ , sono date da :

$$\Gamma_{ij\kappa\dots}^{(n)}(\varphi) = \frac{\delta^n \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_\kappa \dots} \quad (A13)$$

Se v_i è il valore di aspettazione di vuoto di φ_i : $\delta Z[J\dots]/\delta J_i |_{J=0} = v_i$, allora le funzioni di vertice proprie a n punti sono :

$$\Gamma_{ij\kappa\dots}^{(n)} = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j \delta \varphi_\kappa \dots} \right|_{\varphi=v}$$

(i,j,... indicano ogni indice che $\varphi_i, \varphi_j, \dots$ possono portare, incluse le variabili spazio-temporali). Si possono definire alcuni vertici propri usando il funzionale $G_{ab}(x,y; a_\alpha^a)$. (Tenendo presente che gli inversi dei propagatori sono le funzioni di vertice a due punti, anche in presenza di campi classici esterni; in notazione generica :

$$\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j} \cdot \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_j \delta J_\kappa} = \delta_{i\kappa}$$

Questa osservazione è contingente in quanto $G_{ab}(a_\alpha^a)$ è effettivamente il propagatore del ghost in un campo classico a_α^a esterno, con "sorgenti esterne per il campo del ghost" poste uguali a zero.) Il vertice proprio ghost-ghost-vettore è dato quindi da :

$$T_{ab, \mu}^{\nu\mu}(x, y, z; a) = - \frac{\delta}{\delta a_\mu^\nu(z)} G_{ab}^{-1}(x, y; a, \phi, \bar{\phi}) \quad (A14)$$

e il vertice ghost-ghost-fermione-fermione $H_{ab, mn}$ da :

$$H_{ab, mn}(x, y, z, v) = - \frac{\delta^2}{\delta \bar{\phi}_m(z) \delta \phi_n(v)} G_{ab}^{-1}(x, y; a, \phi, \bar{\phi}) \quad (A15)$$

Usando le relazioni $\frac{\delta}{\delta J} = \frac{\delta a}{\delta J} \frac{\delta}{\delta a}$, $\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} = \frac{\delta \phi}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta \phi}$, $\frac{\delta}{\delta \eta} = \frac{\delta \bar{\phi}}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}}$ si ottiene dopo alcune manipolazioni :

$$\begin{aligned} & g \bar{\phi}(x) t_a \frac{\delta \Gamma^0}{\delta \bar{\phi}(x)} - g \frac{\delta \Gamma^0}{\delta \phi(x)} \gamma^0 t_a \gamma^0 \phi(x) - [i \partial^\mu \delta_{ab} + i g C_a^{db} a_d^\mu(x)] \frac{\delta \Gamma^0}{\delta a_b^\mu(x)} \\ & + i g \int d^4 y d^4 y' d^4 z T_{abd}^{\nu\mu}(x, y, z) G_{bb'}(y, y') [-i \frac{\delta a_\mu^d(z)}{\delta J_{d'}^\mu(y')} C_{b'd''d'} \frac{\delta \Gamma^0}{\delta a_{d''}(y')}] \\ & + i g \int d^4 y d^4 y' d^4 z d^4 \omega H_{abmn}(x, y, z, \omega) G_{bb'}(y, y') [-i \phi_n(\omega) \frac{\delta \bar{\phi}_m(z)}{\delta J_{d'}^\nu(y')} C_{cdb'} \frac{\delta \Gamma^0}{\delta a_\mu^c(y')} \\ & \quad - i \bar{\phi}_n(\omega) \frac{\delta \phi_m(z)}{\delta J_{d'}^\nu(y')} C_{cdb'} \frac{\delta \Gamma^0}{\delta a_\mu^c(y')}] \\ & + i g \int d^4 y d^4 y' d^4 z [G_{bb'}(y, y') T_{abc}^{\nu\mu}(x, y, z) (\frac{\delta \Gamma^0}{\delta \phi_a(y')} t_{b'}^{rs} \frac{\delta a_\mu^c(z)}{\delta \eta_s(y')} \\ & \quad - \frac{\delta \Gamma^0}{\delta \bar{\phi}_a(y')} \gamma^0 t_{b'}^{sr} \gamma^0 \frac{\delta a_\mu^c(z)}{\delta \eta_s(y')}] \\ & + i g \int d^4 y d^4 y' d^4 z d^4 \omega G_{bb'}(y, y') H_{abmn}(x, y, z, \omega) \\ & \quad \cdot [\frac{\delta \Gamma^0}{\delta \bar{\phi}_a(y')} t_{b'}^{rs} \frac{\delta \bar{\phi}_m(z)}{\delta \bar{\eta}_s(y')} \bar{\phi}_m(\omega) - \frac{\delta \Gamma^0}{\delta \bar{\phi}_a(y')} \gamma^0 t_{b'}^{sr} \gamma^0 \frac{\delta \bar{\phi}_m(z)}{\delta \eta_s(y')} \phi_n(\omega) \\ & \quad + \frac{\delta \Gamma^0}{\delta \phi_a(y')} t_{b'}^{rs} \frac{\delta \phi_n(z)}{\delta \bar{\eta}_s(y')} \bar{\phi}_m(\omega) - \frac{\delta \Gamma^0}{\delta \bar{\phi}_a(y')} \gamma^0 t_{b'}^{sr} \gamma^0 \frac{\delta \phi_n(z)}{\delta \bar{\eta}_s(y')} \phi_n(\omega)] = 0 \quad (A16) \end{aligned}$$

La equazione (A16) rappresenta la equazione generatrice delle identità di Ward-Takahashi per i vertici propri. Effettuando le derivate funzionali rispetto alle variabili appropriate della equazione (A16) e ponendo i campi esterni uguali a zero si hanno le identità di Ward associate alla invarianza di gauge della Lagrangiana.

Derivando la eq. (A16) rispetto a a_a^μ si vede che si ottiene :

$$\frac{1}{\alpha} \kappa^\mu \kappa^\nu D_{\mu\nu}^{ab}(\kappa) = \delta^{ab} \quad (A17)$$

e quindi il propagatore vettoriale vestito può venire scritto nella forma :

$$D_{ab}^{\mu\nu}(\kappa) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{\kappa^2} \right) D_{ab}(\kappa^2) + \alpha \frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{\kappa^4} \delta_{ab}$$

Derivando la eq. (A16) due volte rispetto ad \mathcal{Q} si ottiene la equazione (10). Si ha inoltre $(\kappa+p)_\mu \kappa_\nu p_\sigma T^{\mu\nu\sigma}(\kappa, p, -\kappa-p) = 0$

Derivando la equazione (A16) rispetto a ϕ e $\bar{\phi}$ si ottiene infine la equazione (13).

APPENDICE B

Derivazione delle equazioni di Dyson

Le equazioni di Dyson usate nella discussione della rottura dinamica della simmetria di gauge in modelli non abeliani possono venire derivate dalle equazioni del moto funzionali (di Schwinger) per i campi ψ , A_a^μ e C_a^* in presenza di sorgenti classiche esterne $\bar{\eta}$, J_μ^a e S_a . Queste equazioni sono date da ($W \equiv W[J, \eta, \bar{\eta}, s, s^*]$); per maggiori dettagli sul metodo si rimanda a Lurie)

$$\left[i \gamma^\mu (\partial_\mu + g t^a \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)}) - m \right] \left(-i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) W = \eta(x) W \quad (B1)$$

$$\begin{aligned} & \left[g^{\mu\nu} \square - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \left(-i \frac{\delta}{\delta J_\nu^a(x)} \right) W - i \partial_\nu (C_{abc} \frac{\delta}{\delta J_\mu^b(x)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^c(x)}) W \\ &= -i g \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma^\mu t^a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} + i g \frac{\delta}{\delta J_\nu^b(x)} \left[\partial^\mu \frac{\delta}{\delta J_\nu^c(x)} - \partial^\nu \frac{\delta}{\delta J_\mu^c(x)} + \right. \\ & \left. + g C_{fcd} \frac{\delta}{\delta J_\mu^f(x)} \frac{\delta}{\delta J_\nu^d(x)} \right] C_{abc} W - g \left(\partial_\mu \frac{\delta}{\delta S_b(x)} \right) \frac{\delta}{\delta S_c^*(x)} C_{abc} W \quad (B2) \end{aligned}$$

$$\square \left(-i \frac{\delta}{\delta S_a^*(x)} \right) W - i g C_{abc} \partial^\mu \left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^c(x)} \frac{\delta}{\delta S_b^*(x)} \right) W = S_a(x) W \quad (B3)$$

Le funzioni di Green connesse a due punti in presenza di una corrente $J_a^\mu(x)$ esterna sono definite da :

$$S_F(x, y; J) = - \frac{\delta^2 Z}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \Big|_{\eta = \bar{\eta} = s = s^* = 0}$$

$$D_{F ab}^{\mu\nu}(x, y; J) = - \frac{\delta^2 Z}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y)} \Big|_{\eta = \bar{\eta} = s = s^* = 0}$$

$$G_{Fab}(\kappa, \gamma, J) = - \frac{\delta^2 Z}{\delta S_a^*(\kappa) \delta S_b(\gamma)} \Big|_{\eta = \bar{\eta} = s = s^* = 0}$$

Le equazioni di Dyson per queste funzioni seguono dalle (B1)-(B3) applicando $\frac{\delta}{\delta \eta(\gamma)}$, $\frac{\delta}{J_b^2(\gamma)}$, $\frac{\delta}{\delta S_c(\gamma)}$ alla (B1), (B2)

e (B3) rispettivamente e ponendo poi $\eta = \bar{\eta} = s = s^* = 0$. La inserzione di autoenergia propria fermionica $\Sigma_F(J)$ è definita dalla equazione simbolica :

$$S_F(J) = S_{oF} + \iint S_{oF} \cdot \Sigma_F(J) \cdot S_F(J) \quad (B4)$$

e la inserzione di autoenergia propria per il ghost $\Sigma_G(J)$ è data da :

$$G_F(J) = G_{oF} + \iint G_{oF} \cdot \Sigma_G(J) \cdot G_F(J) \quad (B5)$$

Si introduce inoltre il tensore di polarizzazione proprio per i bosoni di gauge $\Pi_{ab}^{\mu\nu}(\kappa, \gamma, J)$, che è definito dalla equazione simbolica :

$$D_F(J) = D_{oF} + \iint D_{oF} \cdot \Pi(J) \cdot D_F(J) \quad (B6)$$

Le integrazioni si intendono sulle coordinate interne e \cdot indica il prodotto tra matrici.

Tenendo presente inoltre che vale (ij : indici spazio-temporali e interni) :

$$\begin{aligned} [S_F(J)_{ij}]^{-1} &= \left[\frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta \eta_i \delta \eta_j} \right]_{\eta = \bar{\eta} = 0}^{-1} = \left[\frac{\delta^2 \Gamma[\phi, \bar{\phi}, \rho]}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \right]_{\phi = \bar{\phi} = 0} \\ &= S_F^{-1}(\rho)_{ij} \end{aligned}$$

si ottiene l'identità :

$$\frac{\delta S_F^{-1}(\kappa, \gamma; \rho)}{\delta \rho_\mu^a(z)} \equiv \frac{\delta \Sigma(\kappa, \gamma; \rho)}{\delta \rho_\mu^a(z)} = \Gamma_a^\mu(\kappa, \gamma, z; \rho) \quad (B7)$$

e inoltre, con ragionamenti analoghi :

$$\frac{\delta \Sigma_G^{bc}(x, y; a)}{\delta a_\mu^a(z)} = \tilde{T}_{bca}^\mu(x, y, z; a) \quad (B8)$$

$$\frac{\delta \Pi_{ab}^{\mu\nu}(x, y, a)}{\delta a_\sigma^c(z)} = T_{abc}^{\mu\nu\sigma}(x, y, z; a) \quad (B9)$$

Infine si pone dappertutto $a = 0$.

Con queste posizioni si ottiene il sistema di equazioni integrali accoppiate illustrato dalle figure (3) (4) e (5). I calcoli espliciti si trovano in parte nella Appendice (B) del lavoro di Eichten e Feinberg ²⁶.

APPENDICE C

Elenco dei principali nuclei di Bethe-Salpeter all'ordine più basso e dei nuclei ridotti f_{ij} .

I nuclei usati nel paragrafo 2) sono :

$$K_{VV\alpha\beta\delta\delta}^{\mu\nu\sigma\delta}(P|P, q, q) = -ig^2 \left\{ \frac{1}{2} C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\delta\beta\lambda'} [g^{\mu\delta} (2p-q)^\delta + g^{\delta\mu} (-q-p)^\delta + 2g^{\delta\mu} (-q-p)^\delta] \left[(g^{\xi\xi'} - \frac{(q-p)^\xi (q-p)^{\xi'}}{(q-p)^2}) \frac{1}{(p-q)^2 - \mu^2} \right]_{\lambda\lambda'} + \alpha_R \frac{(q-p)^\xi (q-p)^{\xi'}}{(q-p)^4} \delta_{\lambda\lambda'} \right\} \\ \times [g^{\nu\delta} (-p-q)^{\delta'} + g^{\delta\nu} (2p-q)^\nu + g^{\delta'\nu} (2p-q)^\delta] + (p \rightarrow -p, \alpha \leftrightarrow \beta, \mu \leftrightarrow \nu) \\ + \frac{1}{2} g^2 [C_{\alpha\beta\lambda} C_{\delta\gamma\lambda} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\delta} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\delta}) + C_{\alpha\delta\lambda} C_{\beta\gamma\lambda} (g^{\mu\nu} g^{\sigma\delta} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\delta}) \\ + C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\delta\beta\lambda} (g^{\mu\delta} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\sigma\delta})]$$

$$K_{VG\alpha\beta\delta\delta}^{\mu\nu}(P|P, q, q) = -ig^2 \left[\frac{1}{2} (C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\delta\beta\lambda} (p-q)^\nu g^\mu \frac{1}{(p-q)^2}) + \frac{1}{2} (p \rightarrow -p, \alpha \leftrightarrow \beta, \mu \leftrightarrow \nu) \right]$$

$$K_{GV\alpha\beta\delta\delta}^{\sigma\delta}(P|P, q, q) = K_{VG\delta\alpha\beta}^{\sigma\delta}(q, q, P|P)$$

$$K_{GG\alpha\beta\delta\delta}(P|P, q, q) = -ig^2 C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\delta\beta\lambda'} p^\xi q^\xi \left\{ \left[g^{\xi\xi'} - \frac{(p-q)^\xi (p-q)^{\xi'}}{(p-q)^2} \right] \frac{1}{(q-p)^2 - \mu^2} + \alpha_R \frac{(p-q)^\xi (p-q)^{\xi'}}{(p-q)^4} \delta_{\lambda\lambda'} \right\}$$

$$K_{VF\alpha\beta\delta\delta}^{\mu\nu}(P|P, q, q) = -ig^2 [\gamma^\nu t_\beta S_F(q-p) \gamma^\mu t_\alpha + \gamma^\mu t_\alpha S_F(q+p) \gamma^\nu t_\beta]$$

$$K_{FV\delta\delta}^{\sigma\delta}(P|P, q, q) = K_{VF\delta\delta}^{\sigma\delta}(q, q, P|P)$$

$$K_{FG\delta\delta}(P|P, q, q) = K_{GF\delta\delta}(q, q, P|P) = 0$$

$$K_{FF}^{\mu\nu\mu'\nu'}(P|P, q, q) = ig^2 (\gamma^\mu t_\alpha)^{\mu\mu'} (\gamma^\nu t_\beta)^{\nu\nu'} \left\{ \left[g^{\mu\nu} - \frac{(p-q)^\mu (p-q)^\nu}{(p-q)^2} \right] \frac{1}{(p-q)^2 - \mu^2} \right\}_{\alpha\beta} \\ + \alpha_R \frac{(p-q)^\mu (p-q)^\nu}{(p-q)^4} \delta_{\alpha\beta}$$

f_{ij}^{l0} rappresenta l'accoppiamento di un vertice al primo ordine nel momento del bosone di Goldstone ad un vertice all'ordine zero e f_{ij}^{l1} rappresenta l'accoppiamento di un vertice al primo ordine con un vertice al primo ordine:

$$f_{11}^{\alpha\beta\delta\delta}(x, \frac{M^2}{p^2}, g) = \frac{-1}{16\pi^2} g^2 \frac{1}{6} [C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\delta\beta\lambda} + C_{\beta\gamma\lambda} C_{\delta\alpha\lambda}] [\theta(x-1)(9x^2 + 50x - 7) \frac{1}{4x^2}]$$

$$+ \theta(1-x) (g + 50x - 7x^2) \frac{1}{4}] + O\left(\frac{\mu^2}{p^2}\right)$$

$$f_{12}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\chi, 0, g) = \frac{1}{16\pi^2} g^2 \frac{1}{2} [C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\lambda\delta\beta} + C_{\beta\gamma\lambda} C_{\lambda\delta\alpha}] \left[\theta(x-1) \frac{1-3x}{12x} + \theta(1-x) \frac{x^2-3x}{12} \right] \\ = \frac{x}{3} f_{21}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\chi, 0, g)$$

$$f_{22}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\chi, 0, g) = -\frac{1}{16\pi^2} g^2 \frac{1}{2} [C_{\alpha\gamma\lambda} C_{\lambda\delta\beta} + C_{\beta\gamma\lambda} C_{\lambda\delta\alpha}] \left[\frac{3}{4x} \theta(x-1) + \frac{3}{4} x \theta(1-x) \right]$$

$$f_{33}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\chi, 0, g) = \frac{1}{16\pi^2} g^2 \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\lambda} C_{\lambda\gamma\delta} \frac{3}{4} \left[\frac{1}{x} \theta(x-1) + x \theta(1-x) \right]$$

$$f_{14}^{\alpha\beta}(\chi^2, \frac{\mu^2}{p^2}, \frac{M^2}{p^2}, g) = \frac{1}{12\pi^2} g^2 \left\{ \left[\theta(x-1) \left(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{x}\right) - \theta(1-x) \frac{x^2}{2} \right] \frac{1}{2} \delta^\alpha \{t_\beta, t_\alpha\} \delta^\beta \right. \\ \left. + \left[\theta(x-1) \frac{-3}{2x} + \theta(1-x) \frac{x}{2} \right] \frac{1}{2p^2} (\delta^\alpha t_\beta M \delta^\beta t_\alpha \delta^\gamma M \delta^\gamma + M t_\beta M \delta^\alpha t_\beta \delta^\gamma) \right. \\ \left. + \alpha \leftrightarrow \beta \right\} + \left[\theta(x-1) \left(\frac{-3}{2x} + \frac{1}{x^2}\right) + \theta(1-x) \frac{-x}{2} \right] \\ \times \frac{1}{2p^2} (\delta^\alpha \{t_\beta, t_\alpha\} \delta^\beta M \delta^\gamma M \delta^\gamma + M \{t_\beta, t_\alpha\} \delta^\alpha M \delta^\beta + M \delta^\alpha M \{t_\beta, t_\alpha\} \delta^\beta) \\ + O\left(\frac{\mu^4}{p^4}, \frac{\mu^2 M^2}{p^4}, \frac{M^4}{p^4}\right)$$

$$f_{15}^{\alpha\beta}(\chi^2, \frac{\mu^2}{p^2}, \frac{M^2}{p^2}, g) = \frac{1}{12\pi^2} g^2 \left\{ \left[3\theta(x-1) + 3x\theta(1-x) \right] \frac{1}{2} (t_\beta M \delta^\alpha t_\alpha \delta^\beta + \alpha \leftrightarrow \beta) \right. \\ \left. + \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{x}\right) \theta(x-1) + \frac{x^2}{2} \theta(1-x) \right] \frac{1}{2} (\{t_\beta, t_\alpha\} \delta^\alpha M \delta^\beta + \delta^\alpha M \{t_\beta, t_\alpha\} \delta^\beta) \right\} \\ + O\left(\frac{\mu^2}{p^2}, \frac{M^2}{p^2}\right)$$

$$f_{55}^{nn'mm'}(\chi, \frac{\mu^2}{p^2}, \frac{M^2}{p^2}, g) = \frac{3}{16\pi^2} g^2 \left\{ \left[\theta(x-1) + x\theta(1-x) \right] \left[(\delta^\alpha t_\alpha \delta^\beta)^{nn'} (t_\beta)^{mm'} \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} \\ + O\left(\frac{\mu^2}{p^2}, \frac{M^2}{p^2}\right)$$

$$f_{11}^{11}(\chi) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\lambda} C_{\gamma\delta\lambda} \left[\left(3 + \frac{25}{4x} - \frac{3}{4x^2}\right) \theta(x-1) + \left(3 + \frac{25}{4}x - \frac{3}{4}x\right) x \theta(1-x) \right]$$

$$f_{13}^{11}(\chi) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\lambda} C_{\gamma\delta\lambda} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x}\right) \theta(x-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) x^2 \theta(1-x) \right]$$

$$f_{13}^{10}(\chi) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{6} C_{\alpha\beta\lambda} C_{\gamma\delta\lambda} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4x}\right) \theta(x-1) - \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{4}\right) \theta(1-x) \right] \frac{1}{x p^2}$$

$$f_{13}^{11}(\chi) = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\lambda} \left[\frac{1}{2x} \theta(x-1) + \frac{x^2}{2} \theta(1-x) \right]$$

$$f_{33}^{10}(\chi) = -\frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma} C_{\gamma\delta\lambda} \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{x}\right) \theta(x-1) - \frac{x^4}{4} \theta(1-x) \right] \frac{1}{x p^2}$$

C A P I T O L O V

METODI VARIAZIONALI PER LO STUDIO DEGLI ASPETTI NON LINEARI
DELLE TEORIE DINAMICAMENTE ROTTE

1) Introduzione dell'azione efficace per operatori composti e principio variazionale.

Recentemente alcuni autori ^{49,52} si sono rivolti al problema se la soluzione che rompe dinamicamente la simmetria della Lagrangiana sia energeticamente favorita rispetto alla soluzione simmetrica. Nelle teorie con cutoff come la teoria BCS e il modello di Nambu questa circostanza si verifica effettivamente. Questo capitolo è dedicato allo studio con metodi variazionali del problema corrispondente in teorie con simmetria di gauge locale apparentemente rinormalizzabili, cioè senza cutoff.

Per semplicità le considerazioni successive verranno limitate al caso abeliano, ma non esistono ostacoli che ne impediscano una generalizzazione a situazioni più complicate.

Si introdurranno innanzitutto una azione efficace ed un potenziale efficace per operatori composti ⁵². Questa necessità è dettata dalla circostanza che in teorie con rottura dinamica della simmetria acquista valore di aspettazione di vuoto non nullo un operatore di campo composto del tipo $\phi \Gamma_a \phi$ e non il campo ϕ stesso (la trasformata di Fourier di $\langle 0 | T \phi(x) \Gamma_a \phi(y) | 0 \rangle$ è sostanzialmente (a meno di fattori numerici) la quantità $\lambda(q)$ dei cap. III e IV ed è non nulla in caso di rottura dinamica della simmetria).

La espressione per il potenziale efficace verrà derivata in uno schema di approssimazione di tipo Hartree-Fock che include la somma di infiniti diagrammi e che tiene conto di alcune strutture non lineari della teoria, che vanno perdute nella approssimazione

classica ad albero. Con questa scelta le equazioni del moto per le funzioni ad n punti, che si ricavano dalla richiesta di stazionarietà della azione efficace sotto variazioni arbitrarie dei suoi argomenti funzionali, sono identiche a quelle ricavate dalle equazioni di Schwinger-Dyson e Bethe-Salpeter in approssimazione a scala (v. cap. III). Le soluzioni delle corrispondenti equazioni linearizzate contengono, come è noto dai cap. III e IV, dei parametri arbitrari. Questi possono venire determinati usando un metodo variazionale del tipo Rayleigh-Ritz, inserendo cioè le soluzioni delle equazioni linearizzate nella espressione del potenziale efficace e imponendo la stazionarietà rispetto alle variazioni dei parametri liberi. Come risultato si ottengono vincoli algebrici su questi parametri.

In teorie di Higgs usuali si può definire la ampiezza di persistenza del vuoto (o funzionale generatore delle funzioni di Green), $W[J]$ in presenza di una sorgente classica $J(x)$:

$$W[J] = e^{iZ[J]} \equiv \langle 0 | 0 \rangle_{in}^J \quad (1)$$

$$= \int [d\Phi] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x)\Phi(x)] \right\}$$

dove si è considerato per semplicità il caso di un singolo campo scalare Φ . In generale Φ rappresenterà un multipletto e, nel caso di teorie di gauge, $\mathcal{L}(x)$ conterrà anche termini di gauge. L'azione efficace è allora definita come trasformata di Legendre di $-i \ln W[J] = Z[J]$, il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse :

$$\Gamma[\phi] = Z[J] - \int d^4x \phi(x) J(x) \quad (2)$$

con $\phi(x) = \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}$ campo classico in presenza di $J(x)$;

$J(x)$ nella (2) si intende espresso in termini di $\phi(x)$. Si vede dalla (2) che $\Gamma[\phi]$ soddisfa a :

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = -J(x) \quad (3)$$

e le derivate n-esime di $\Gamma[\phi]$ rispetto a ϕ sono le funzioni

di vertice proprie in presenza di una sorgente classica esterna. In particolare $\Gamma(\nu)$, con $\nu = \frac{\delta Z}{\delta J} \Big|_{J=0}$ valore di aspettazione di vuoto del campo Φ in assenza di sorgenti, come si vede dalle definizioni precedenti, rappresenta la somma di tutti i grafici di vuoto connessi irriducibili per una particella $in \langle 0|0 \rangle_{out}$ in assenza di campi classici esterni.

Le soluzioni della teoria fisica in esame richiedono quindi, essendo in questo caso assenti le sorgenti esterne :

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} = 0 \quad (4)$$

Questa equazione, una volta noto $\Gamma[\phi]$ fornisce una espressione per il valore di aspettazione di vuoto del campo quantistico. In una teoria invariante per traslazioni spazio-temporali⁴⁶, il campo classico in assenza di sorgenti esterne, che è identico al valore di aspettazione di vuoto dell'operatore di campo quantistico, è un vettore costante ν e si scrive :

$$\Gamma[\phi] \Big|_{\substack{inv. per \\ trasl.}} = -V(\nu) \delta^4(0) \quad (5)$$

che definisce il potenziale efficace. Il ν che minimizza $V(\nu)$ è ancora in questo caso determinato dalla (4). $\Gamma[\phi]$ può venire sviluppato in potenze di \hbar ed è noto che questo procedimento è equivalente ad uno sviluppo in loops. Quest'ultimo lo si ottiene usualmente valutando l'integrale funzionale che definisce

$\Gamma[\phi]$ con il metodo della fase stazionaria trasladando il campo Φ di Φ_0 , dove Φ_0 è il campo che soddisfa alle equazioni del moto classiche (2). All'ordine $(\hbar)^1$ si può ricavare l'espressione⁵¹ :

$$\Gamma[\phi] = I[\phi] - \frac{i}{2} \hbar \text{Tr} \ln \Delta[\phi] D^{-1} + \Gamma_2[\phi] \quad (6)$$

dove $I[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ è l'azione classica (con ghosts e termini gauge-fixing in una teoria di gauge),

$$i \Delta^{-1}[\phi](x, y) = \frac{\delta^2 I[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}$$

è un propagatore in presenza di un campo esterno e $D(x, y) = \Delta[0](x, y)$ è il propagatore libero. $\Gamma_2[\phi]$ è la somma di tutti i grafici di vuoto irriducibili per una particella con propagatori $\Delta[\phi]$ e vertici dato dalla parte di interazione di $\mathcal{L}(\Phi + \phi)$. dove Φ è il campo quantistico. La traccia, il logaritmo e i prodotti sono da intendersi in senso funzionale.

Il primo termine a destra nello sviluppo (6) dà il contributo classico (zero loops) e il secondo la 1^a correzione quantistica $O(\hbar)$ (un loop) all'azione efficace.

Per trattare teorie con rottura dinamica della simmetria si estende la definizione precedentemente data per $\Gamma[\phi]$ introducendo una azione generalizzata $\Gamma[\phi, G]$ dove G è una funzione di Green a due punti presa come variabile indipendente.

Nel seguito non si pretenderà di dare delle dimostrazioni rigorose delle affermazioni che verranno fatte (che peraltro sono reperibili nella letteratura), ma di fornire solo degli argomenti di plausibilità, per non oscurare il filo logico di questo nuovo approccio ad alcuni problemi di stabilità delle soluzioni in teorie di campo.

Come nel caso precedentemente illustrato si introduce anche qui un funzionale $Z[J, \kappa]$ che rappresenta l'ampiezza di persistenza del vuoto in presenza di sorgenti $J(x)$ e $\kappa(x, y)$ (non-locale):

$$W[J, \kappa] = e^{\frac{i}{\hbar} Z[J, \kappa]} = \int [d\Phi] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [I[\Phi] + \int d^4x \Phi(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Phi(x) \kappa(xy) \Phi(y)] \right\} \quad (7)$$

$I(\Phi)$ è l'azione classica con eventualmente parte di ghost e termini gauge-fixing, e $\Phi(x)$ può rappresentare un multipletto di campi scalari. La generalizzazione a campi fermionici è triviale. Per $\kappa(x, y) = 0$ si ritorna al caso precedentemente trattato. Si definiscono $\phi(x)$ e $G(x, y)$ tramite le relazioni:

$$\frac{\delta Z[J, K]}{\delta J(x)} = \phi(x)$$

$$\frac{\delta Z[J, K]}{\delta K(x, y)} = \frac{1}{2} [\phi(x)\phi(y) + \hbar G(x, y)] \quad (8)$$

Si elimina J e K a favore di ϕ e G e si definisce l'azione efficace generalizzata $\Gamma[\phi, G]$ come doppia trasformata di Legendre di $Z[J, K]$:

$$\Gamma[\phi, G] = Z[J, K] - \int d^4x J(x)\phi(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y K(x, y) \{ \phi(x)\phi(y) + \hbar G(x, y) \} \quad (9)$$

Derivando questa espressione si ottiene l'identità:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\phi, G]}{\delta \phi(x)} &= -J(x) - \int d^4y K(x, y)\phi(y) \\ \frac{\delta \Gamma[\phi, G]}{\delta G(x, y)} &= -\frac{1}{2} \hbar K(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

Le soluzioni fisiche della teoria devono quindi obbedire al principio variazionale:

$$\frac{\delta \Gamma[\phi, G]}{\delta \phi(x)} = 0 \quad \frac{\delta \Gamma[\phi, G]}{\delta G(x, y)} = 0 \quad (11)$$

Si può osservare che la usuale azione efficace $\Gamma[\phi]$ è data da $\Gamma[\phi, G]$ per $K = 0$, ovvero da $\Gamma[\phi, G_0]$ dove G_0 è la soluzione della seconda delle (10) per $K = 0$.

Anche in questo caso è possibile costruire uno sviluppo in serie per $\Gamma[\phi, G]$. Esso è dato da:

$$\Gamma[\phi, G] = I[\phi] - \frac{i}{2} \hbar \text{Tr} [\ln GD^{-1} - G\Delta^{-1}[\phi] + 1] + \Gamma_2[\phi, G] \quad (12)$$

dove $I[\phi]$ è l'azione classica, $I[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x)$; $\Delta[\phi]$ è un propagatore in un campo esterno e D è il propagatore libero:

$$i \Delta^{-1} [\phi] (x, y) = \frac{\delta^2 I [\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \quad (13)$$

$$i D (x, y) = i \Delta [0] (x, y) \quad (14)$$

$\Gamma_2 [\phi, G]$ è la somma di tutti i grafici di vuoto irriducibili per due particelle con propagatori G e vertici dati dalla parte di interazione di $L (\Phi + \phi)$. La traccia e il logaritmo nella (12) sono da intendersi in senso funzionale. Il primo termine nello sviluppo (12) rappresenta la approssimazione ad albero (classica = zero loop) e il secondo la prima approssimazione quantistica (un loop).

La derivazione della (12) effettuata nell'articolo ⁵² di Jackiw et al. verte sostanzialmente su tre circostanze: 1) Il rapporto esistente tra $\Gamma [\phi, G]$ e $\Gamma [\phi]$ sopra illustrato (v. pag. 120); 2) lo sviluppo in serie (6) per $\Gamma [\phi]$; 3) l'interpretazione di $\Gamma [0, G]$ come somma di tutti i grafici di vuoto irriducibili per due particelle con propagatori G .

Si può inoltre facilmente mostrare, derivando rispetto a G la (9), che G rappresenta il propagatore esatto connesso della teoria:

$$\hbar G (x, y) = \frac{\int [d\Phi] \Phi(x) \Phi(y) \exp \{i/\hbar I [\phi, G; \Phi]\}}{\int [d\Phi] \exp \{i/\hbar I [\phi, G; \Phi]\}} \quad (15)$$

dove $I [\phi, G; \Phi] = I [\Phi + \phi] - \Phi \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} - \frac{1}{\hbar} \Phi \frac{\delta \Gamma}{\delta G} \Phi$
che dà per $\phi = 0$ e $-\hbar/2 \kappa = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi} = 0$:

$$\hbar G_0 (x, y) = \frac{\int [d\Phi] \Phi(x) \Phi(y) \exp \{i/\hbar I [\Phi]\}}{\int [d\Phi] \exp \{i/\hbar I [\Phi]\}}$$

come deve essere.

Anche in questo caso si può definire una generalizzazione del potenziale efficace nel caso di un sistema invariante per traslazioni:

$$\Gamma [\phi, G] \Big|_{\substack{\text{inv. per} \\ \text{trasl.}}} = -V [\phi, G] \delta^4(0) \quad (16)$$

Dallo sviluppo in serie (12) si ottiene immediatamente uno sviluppo in serie per $V[\phi, G]$. Introducendo le trasformate di Fourier dei propagatori:

$$G(p) = \int d^4x e^{ip(x-y)} G(x-y)$$

$$\Delta(\phi, p) = \int d^4x e^{ip(x-y)} \Delta[\phi](x-y)$$

$$D(p) = \int d^4x e^{ip(x-y)} D(x-y)$$

si ha :

$$V[\phi, G] = \phi D^{-1}(0) \phi + U(\phi) + \frac{i}{2} \hbar \int d^4p \text{Tr} [\ln G(p) D^{-1}(p) - G(p) \Delta^{-1}(\phi, p) + 1] - V_2[\phi, G] \quad (17)$$

dove la traccia si intende ora solo sugli indici delle componenti interne dei campi e ϕ è una costante indipendente dello spazio e del tempo. $U(\phi)$ è il potenziale classico e $V_2[\phi, G]$ rappresenta la somma di tutti i grafici di vuoto irriducibili per due particelle con propagatori $G(p)$ e vertici dati da $\mathcal{L}_{INT}(\phi + \bar{\phi})$. Le soluzioni della teoria fisica devono soddisfare al principio variazionale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V[\phi, G]}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\delta V[\phi, G]}{\delta G} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

La approssimazione semiclassica o WKB viene ottenuta trattando solo i primi due termini nella (12) o i primi tre nella (17) :

$$\Gamma_{sc}[\phi, G] = I[\phi] - \frac{i}{2} \hbar \text{Tr} [\ln G D^{-1} - G \Delta^{-1}[\phi] + 1]$$

La approssimazione di Hartree - Fock si ottiene trattando in $\Gamma_2[\phi, G]$ (o $V_2[\phi, G]$) solo i grafici di vuoto a due loop all'ordine più basso nella costante di accoppiamento

con propagatori G e vertici al primo ordine nella costante di accoppiamento.

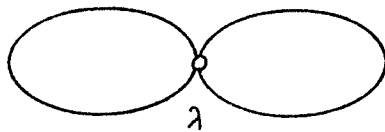


fig.1 Grafico che contribuisce a $\Gamma_2[\phi, G]$ in approssimazione di Hartree-Fock in una teoria $\lambda\phi^4$.

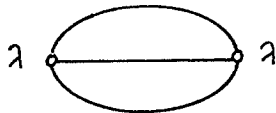


fig.2 Grafico a due loop che non contribuisce nel caso precedente a $\Gamma_2[\phi, G]$.

2) Applicazione alle teorie con rottura dinamica della simmetria

Un questo paragrafo verrà applicato ad un semplice modello abeliano il formalismo sviluppato nel paragrafo precedente. Si costruisce la approssimazione di Hartree-Fock per la azione efficace generalizzata introdotta nel paragrafo precedente, nel caso di una teoria di gauge abeliana $O(2) \otimes O(2)$ con un doppietto di fermioni massicci e due bosoni vettoriali (si veda la (19)). Questo modello è stato recentemente studiato da J.M. Cornwall e R.E. Norton^{24,56} ed è in quasi tutti gli aspetti equivalente al modello studiato sul cap. III di questa tesi. Una differenza importante risiede tuttavia nella presenza nella Lagrangiana di una scala per le masse.

Le equazioni integrali che si ottengono dalla applicazione del principio variazionale (11) forniscono un sistema di equazioni integrali non-lineari per i propagatori della teoria, che risultano essere identiche alle analoghe equazioni di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala. Le equazioni linearizzate ammettono una soluzione asintotica per grandi p^2 per la inserzione di autoenergia fermionica e il tensore di polarizzazione proprio, come discusso nel capitolo III. Gli aspetti nonlineari della teoria vengono analizzati con una procedura del tipo Rayleigh-Ritz. Le soluzioni della teoria linearizzata vengono inserite nella espressione per il potenziale efficace e si determinano dalla richiesta di stazionarietà rispetto a variazioni dei parametri liberi (le masse delle particelle) vincoli algebrici sui parametri stessi.

Prima di iniziare la discussione del modello in cui la rottura della simmetria avviene dinamicamente, risulta istruttivo richiamare come si presenta il problema della favoribilità energetica della soluzione asimmetrica in teorie con scalari di Higgs⁴⁶ (Una discussione esauriente di questa problematica si trova nel cap. 16 delle lezioni di E. Abers e B.W.Lee⁴⁷, si veda anche la rassegna di S.Coleman⁴⁸). In teorie di Higgs acquista valore di aspettazione di vuoto non nullo un campo scalare fondamentale, per la presenza di un minimo del potenziale classico nella Lagrangiana del campo medesimo in corrispondenza di $\phi \neq 0$. Infatti per un campo scalare (singoletto) con in-

terazione quartica, la approssimazione classica per la azione efficace (2) è :

$$\Gamma[\phi] = I[\phi] + \text{Azione relativa ai fermioni e ai bosoni di gauge}$$

dove $I[\phi]$ è la azione classica relativa al campo scalare :

$$I[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \Delta_F^{-1}(x-y) \phi(y) + \int d^4x \mathcal{L}_{INT}(x)$$

con :

$$\Delta_F^{-1}(x-y) = (\square + \mu^2) \delta^4(x-y) \text{ e } \mathcal{L}_{INT}(x) = -\frac{\lambda}{4} \phi^4(x)$$

I potenziali relativi ai fermioni e bosoni di gauge si assume che possiedano un minimo in corrispondenza di campi nulli e si possono quindi tralasciare. La parte relativa ai campi scalari del potenziale efficace (5) è data quindi dalla espressione :

$$V(v) = \frac{1}{2} v \Delta^{-1}(0) v + \frac{\lambda}{4} v^4$$

dove v è una costante e $-\Delta_F^{-1}(p) = p^2 - \mu^2$. Il principio variazionale (4) impone che sia :

$$\frac{dV(v)}{dv} \equiv v \Delta^{-1}(0) + \lambda v^3 = 0$$

cioè : $(\mu^2 + \lambda v^2) v = 0$

con le soluzioni $v_1 = 0$ e $v_2 = \pm \sqrt{-\mu^2/\lambda}$. Inoltre si ha :

$$\left. \frac{d^2 V(v)}{d v^2} \right|_{v=v_1} = \mu^2 \quad \left. \frac{d^2 V(v)}{d v^2} \right|_{v=v_2} = -2\mu^2$$

Nel caso che si ponga $\mu^2 < 0$ si ha quindi che il potenziale ha un minimo per $v = v_2 \neq 0$ e si può concludere che la soluzione nella quale il campo sviluppa un valore di aspettazione di vuoto non nullo è in questo caso ($\mu^2 < 0$) energeticamente favorita già a livello classico.

Analizziamo ora il caso di un semplice modello nel quale è possibile una rottura dinamica della simmetria di gauge. Per mo-

tivi che sarenno chiari più avanti, si considererà un modello abeliano di tipo analogo al modello studiato nel III capitolo, eccetto che per la presenza, come si è detto, già nella Lagrangiana di una lunghezza fondamentale $\frac{1}{m_0}$.

Il modello studiato da Cornwall e Norton è descritto dalla Lagrangiana :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\kappa) &= \bar{\Psi} (i \gamma \cdot \partial - m_0 - g_A \gamma^\mu A_\mu - g_B \tau_2 \gamma^\mu B_\mu) \Psi \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu}_A - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F^{\mu\nu}_B \end{aligned} \quad (19)$$

con :

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu}^B = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

dove $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ rappresenta un doppietto di campi fermionici e τ_2 è la usuale matrice di Pauli : $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Nella (19) sono presenti (anche per $m_0 \neq 0$) le due simmetrie relative al gruppo di gauge $O(2) \times O(2)$:

$$(a) \quad \delta \Psi = i \theta_1(x) \Psi \quad \delta A_\mu = -\frac{1}{g_A} \partial_\mu \theta_1(x) \quad \delta B_\mu = 0$$

$$(b) \quad \delta \Psi = i \theta_2(x) \tau_2 \Psi \quad \delta B_\mu = -\frac{1}{g_B} \partial_\mu \theta_2(x) \quad \delta A_\mu = 0$$

La ipotesi di rottura dinamica della simmetria viene introdotta assumendo che la inserzione di autoenergia fermionica possieda una parte proporzionale a τ_3 . In questo caso si ha, assumendo :

$$\Sigma(p) = \Sigma_S(p) + \tau_3 \Sigma_V(p) \quad (20)$$

$$[\tau_2, \Sigma(p)] = i \tau_1 \Sigma_V(p)$$

Dalla identità di Ward relativa alla invarianza (b) della Lagrangiana (19) si ha allora :

$$\begin{aligned} g_\mu \Gamma_2^\mu(p, p+q) &= \tau_2 S_F^{-1}(p) - S_F^{-1}(p+q) \tau_2 \\ &\stackrel{q \rightarrow 0}{=} [\tau_2, \Sigma(p)] = i \tau_1 \Sigma_V(p) \end{aligned} \quad (21)$$

$\Gamma_2^\mu(p, p+q)$ sviluppa quindi sotto questa ipotesi (con ragiona-

menti analoghi a quelli fatti nel cap. III) un polo di Nambu-Goldstone per $q^2 \rightarrow 0$. Come conseguenza di questa circostanza il mesone vettoriale B_μ che si accoppia alla corrente di Noether relativa alla gauge invarianza (b) acquista una massa M_B , e contemporaneamente i due fermioni acquistano masse $m_0 \pm \frac{1}{2} \delta m$ con $\frac{1}{2} \delta m = \sum_\nu v_\nu(0)$. In questo caso quindi, a differenza del modello abeliano considerato nel cap. III, la rottura dinamica della simmetria $O(2)$ (a) si manifesta nell'apparire di masse differenti per i due fermioni, simmetriche rispetto a m_0 .

La espressione per il potenziale efficace in approssimazione di Hartree-Fock per la Lagrangiana (19) diviene (si veda la espressione 17) (tenendo conto che per fermioni si ha un fattore -1 invece di + $\frac{1}{2}$ davanti al primo termine) :

$$\begin{aligned}
 V[G, D_i] = & -i \int d^4 p T_2 [\ln G(p) S_{F_0}^{-1}(p) - G(p) S_{F_0}^{-1}(p) + 1] \\
 & + \frac{i}{2} \sum_{i=A,B} \int d^4 p T_2 [\ln D_{i\mu\nu}(p) D_{oi}^{\mu\nu}(p) - D_{i\mu\nu}(p) D_{oi}^{\mu\nu}(p) + 1] \\
 & + V_2[G, D_i] \qquad (22)
 \end{aligned}$$

con :

$$V_2[G, D_i] = \frac{i}{2} \sum_{i=A,B} T_2 \int \frac{d^4 p d^4 k}{(2\pi)^8} \Gamma_i^\mu G(p) \Gamma_i^\nu G(p+k) D_{i\mu\nu}(k)$$

dove i propagatori liberi sono dati da :

$$\begin{aligned}
 S_{F_0}(p) &= \frac{i}{p - m_0 + i\epsilon} \\
 D_{oi}^{\mu\nu}(p) &= -i (g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2) \frac{1}{p^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

e si è esclusa una dipendenza da ϕ nel potenziale efficace, in quanto si assume che la rottura spontanea della simmetria avvenga per formazione di stati legati fermionici piuttosto che attraverso un campo scalare con valore di aspettazione di vuoto non-nullo.

$V_2[G, D_i^{\mu\nu}]$ in approssimazione di Hartree-Fock è un funzionale dato dai grafici di vuoto all'ordine più basso nella costante di accoppiamento con due loop e propagatori G e $D_i^{\mu\nu}$, come illustrato nella figura 3.

$$V_2[G, D_i] = \Gamma_A^\mu \text{ (diagram) } \Gamma_A^\nu + \Gamma_B^\mu \text{ (diagram) } \Gamma_B^\nu$$

$\longrightarrow : G(p) \quad \Gamma_A^\mu = g_A \gamma^\mu$
 $\text{~~~~~} : D_A^{\mu\nu}(k) \quad \Gamma_B^\mu = g_B \tau_2 \gamma^\mu$
 $\text{~~~~~} : D_B^{\mu\nu}(k)$

fig.3 $V_2[G, D]$ in approssimazione di Hartree-Fock .

La stazionarietà di $V[G, D_i]$ rispetto a G e D_i richiede che sia :

$$G^{-1}(p) = S_{F_0}^{-1}(p) + \sum_{i=A,B} \int d^4k \Gamma_i^\mu G(p+k) \Gamma_i^\nu D_{i\mu\nu}(k) \quad (23a)$$

$$D_{\mu\nu}^{-1}(p) = D_{0\mu\nu}^{-1}(p) - T_2 \int d^4k \Gamma_i^\mu G(p+k) \Gamma_i^\nu G(k) \quad (23b)$$

Le espressioni diagrammatiche relative a queste due equazioni sono mostrate nella fig. 4. (Si è posto ancora : $G = S_{F_0} + S_{F_0} \Sigma G$ e $D_{\mu\nu}^i = D_{0\mu\nu}^i + D_{0\mu\sigma}^i \Pi_{\sigma\nu}^i D_{\sigma\nu}^i$)

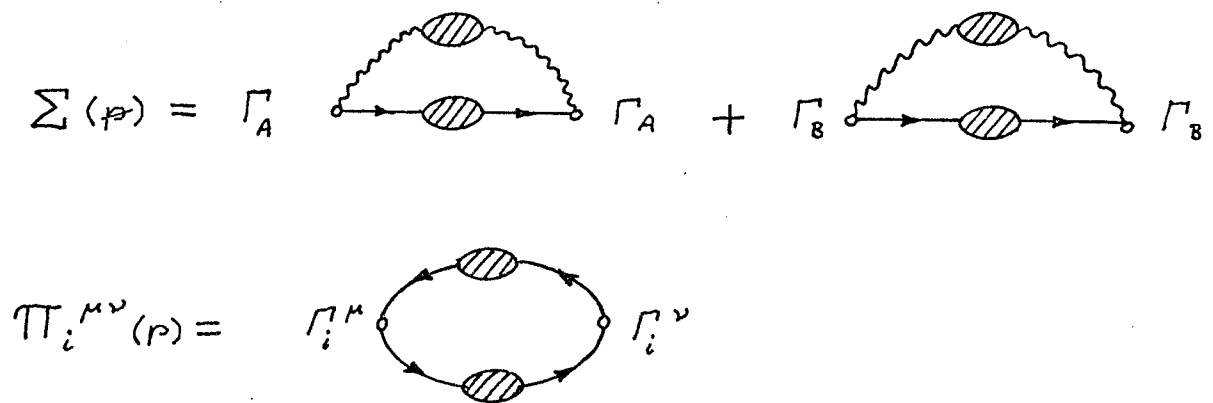


fig.4 Le inserzioni di autoenergia in approssimazione di Hartree-Fock .

La equazione (23a) è identica nella struttura alla equazione (23) per la parte asimmetrica di $\Sigma(p)$ ricavata nel cap. III dalla equazione di Bethe-Salpeter in approssimazione a scala.

Assumendo che $\Sigma(p)$ possieda una parte $\Sigma_V(p)$ proporzionale a τ_3 , la equazione integrale linearizzata corrispondente alla (23a) ammette nel limite di accoppiamento debole ($g_A^2 \neq g_B^2$) la soluzione ben nota (si veda il cap. III e la referenza ²⁴) :

$$\Sigma_V(p) = \begin{cases} \delta m \left(\frac{-p^2}{m^2} \right)^{-\varepsilon} & |p^2| \gg m^2 \\ \delta m & |p^2| \leq m^2 \end{cases} \quad (24)$$

con :

$$\varepsilon = \frac{3}{16\pi^2} (g_A^2 - g_B^2) , \quad \varepsilon > 0$$

Inoltre dalla equazione (23b) si deriva una espressione per la parte regolare per $k^2 \rightarrow 0$ del tensore di polarizzazione $\Pi_B^{\mu\nu}(k)$ e usando la regola di somma corrispondente alla (17) del cap. III si può ottenere, con la soluzione ottenuta per $\Sigma_V(p)$:

$$M^2 = \frac{g_B^2}{2\pi^2 \varepsilon} (\delta m)^2 \quad (25)$$

Nel seguito si mostrerà come questo risultato può venire migliorato con il metodo variazionale. Come nel modello abeliano del cap. III, anche qui le equazioni integrali linearizzate non forniscono alcun vincolo su $\delta m \neq 0$, che caratterizza una situazione di rottura dinamica della simmetria.

I propagatori della teoria possono ora venire parametrizzati in funzione di ε , δm e M^2 e inseriti nella espressione originale per il potenziale efficace $V[G, D_i]$. La richiesta di stazionarietà di $V[G, D_i] = V(\varepsilon, \delta m, M^2)$ rispetto ai parametri δm e M permette di ottenere una serie di relazioni tra di essi, tenendo così in considerazione gli aspetti nonlineari della teoria. Eventuali divergenze presenti in $V(\varepsilon, \delta m, M^2)$ possono venire eliminate sottraendo $V(\varepsilon, \delta m=0, M^2=0)$. Variando l'espressione $V(\varepsilon, \delta m, M^2)$ così ottenuta rispetto ad M si ottiene :

$$M^2 = \frac{g_B^2}{2\pi^2 \varepsilon} (1 - \varepsilon) \quad (26)$$

nell'assunzione che $|\varepsilon \ln M^2 / m_0^2| \ll 1$, cioè $M \sim m_0$. La relazione (26) all'ordine $(g_B^2)^0$ coincide con la relazione (25). Sostituendo questa espressione per M^2 in $V(\varepsilon, \delta m, M^2)$ si ottiene una funzione che dipende solo da δm :

$$V(\varepsilon, \delta m) = \frac{(\delta m)^4}{32\pi^2 \varepsilon} - \frac{m_0^4}{8\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{\delta m}{m_0}\right)^4 \ln \left(1 + \frac{\delta m}{m_0}\right) + \left(1 - \frac{\delta m}{m_0}\right)^4 \ln \left(1 - \frac{\delta m}{m_0}\right) - 7 \left(\frac{\delta m}{m_0}\right)^2 \right\} - \frac{(\delta m)^4}{6\pi^2 \varepsilon (\zeta^2 - 1)^2} \left\{ 1 - 4\varepsilon \ln \frac{8/3}{\zeta^2 - 1} \left(\frac{\delta m}{m_0}\right)^2 \right\}$$

dove $\zeta^2 = g_A^2 / g_B^2 > 1$ e $|\delta m / m_0| < 1$. Se $\delta m > m_0$ si ha che $V(\delta m)$ diviene complesso. Il minimo di questa funzione permette di determinare δm in funzione di m_0 e ε . In conclusione il metodo variazionale di Rayleigh-Ritz permette di ottenere le informazioni che la teoria linearizzata non è in grado di fornire e di asserire la favoribilità energetica della soluzione asimmetrica con $\delta m \neq 0$.

E' chiaro a questo punto che il metodo variazionale fin qui esposto può portare, nel caso del modello abeliano con simmetria chirale discusso nel cap. III, ad informazioni più dettagliate sulla dipendenza della massa bosonica M da g_A^2 e g_V^2 e δm . Esso però non permette di determinare δm per la invarianza di scala della Lagrangiana fondamentale. Il parametro δm che segnala la presenza di una rottura dinamica della simmetria deve venire in questo caso ottenuto, se ciò è possibile, per altra via.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Nei capitoli precedenti è stato mostrato come la rottura dinamica della simmetria in teorie di gauge rappresenta una possibilità realistica per generare masse fermioniche e bosoniche senza dovere invocare la presenza di campi scalari. Si è visto anche come questo tipo di teorie apparentemente pone dei vincoli precisi sullo spettro fisico delle eccitazioni e nel contempo, almeno nel caso di generazione infrarossa, sulle costanti di accoppiamento della teoria.

Molti sono ancora i punti in queste teorie sui quali è necessario indagare più in profondità, tuttavia ad un primo livello di analisi emergono già quelli che sono i problemi di fondo e le caratteristiche peculiari di questi modelli rispetto alle teorie spontaneamente rotte con l'ausilio di campi scalari.

Il meccanismo di Higgs-Kibble può avvenire come è noto, solo in presenza di campi scalari. L'introduzione di questi campi presenta tuttavia alcuni aspetti notoriamente pochi attrattivi. La procedura di giungere ad una rottura spontanea della simmetria tramite una Lagrangiana con campi scalari e termine di massa col segno negativo può apparire artificiosa e non sussiste nessuna evidenza sperimentale per le eccitazioni scalari massicce che sopravvivono nello spettro fisico. Ad esso vengono quindi assegnate grandi masse e piccole costanti di accoppiamento, nell'intento di renderle inosservabili per molti anni a venire. Teorie di questo tipo sono inoltre difficilmente conciliabili con la richiesta di libertà asintotica, per la presenza degli scalari di Higgs^{54,55}. Infine nella teoria sono in genere presenti molti parametri liberi ed è possibile ottenere una grande varietà di modelli usando lo stesso gruppo di simmetria¹⁹.

Quanto è stato detto tuttavia non oscura quello che è uno dei pregi fondamentali delle teorie spontaneamente rotte tramite l'uso di campi scalari. La circostanza che esse descrivano bosoni vettoriali massicci accoppiati a correnti non conservate e tuttavia godano della proprietà di essere rinormalizzabili le pone necessaria

mente come punto di riferimento per la costruzione di modelli che ambiscano a descrivere alcune realtà della fisica delle particelle.

In questo contesto vanno ad inserirsi le teorie che presentano la rottura dinamica della simmetria, cercando di apportare, come si è visto, il minimo necessario di modificazione rispetto ai modelli precedentemente studiati nell'ambito divenuto ormai classico delle teorie con scalari.

I modelli, più o meno realistici, nei quali appare una rottura dinamica della simmetria presentano il pregio di eliminare parte delle artificiosità inerenti alla Lagrangiana dei campi scalari. Si ottiene, come illustrato nei capitoli precedenti, una riduzione dei parametri liberi della teoria e i rapporti tra masse fermioniche e masse bosoniche vengono ad essere determinati in funzione delle costanti di accoppiamento, una circostanza nuova rispetto alle teorie con scalari. Sotto opportune condizioni favorevoli si vengono inoltre a determinare (almeno nello schema di approssimazione usato) equazioni agli autovalori sulle costanti di accoppiamento medesime. A ciò si aggiunge che la assenza di campi scalari fondamentali risolve il problema delle particelle a spin zero nello spettro fisico delle eccitazioni, anche se non si è fino ad oggi sufficientemente indagato sulla presenza di stati legati massicci nelle teorie dinamicamente rotte. Teorie di questo genere con gruppo di simmetria non abeliano sono però in ogni caso asintoticamente libere e mostrano quindi in maniera naturale proprietà da invarianza di scala nel dominio dei grandi momenti.

E' da osservare infine la circostanza che mentre in teorie di Higgs la soluzione asimmetrica è presente già a livello classico (cioè in approssimazione ad albero), le soluzioni della teoria dinamicamente rotta coinvolgono una somma di infiniti loops e rappresentano quindi un effetto in cui le fluttuazioni quantistiche giocano un ruolo di primo piano.²⁹

Uno schema accettabile per un meccanismo di rottura dinamica della simmetria, secondo le idee presentate nei capitoli precedenti, richiede però ancora una più approfondita indagine sotto diversi

punti di vista.

Innanzitutto appare poco realistico uno stato legato fermione-antifermione a massa zero, la cui presenza sia indipendente dalla intensità delle costanti di accoppiamento, almeno all'interno di un certo intervallo di variabilità, come avviene nel caso di generazione ultravioletta delle masse (di tipo A)⁵⁹. Questa circostanza, presente accanto ad altre ambiguità di carattere matematico (illustrate nei paragrafi 7 e 8 del III° capitolo), sostiene la congettura che la rottura spontanea della simmetria e quindi la generazione delle masse delle particelle fisiche possa venire mediata dalle instabilità infrarosse delle teorie di gauge non abeliana. Le recenti investigazioni^{56,57,58} sulle teorie dinamicamente rotte con l'ausilio delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione sembrano suffragare questa ipotesi.

E' interessante inoltre notare che un problema di principale rilevanza nello studio di modelli con simmetria chirale, e cioè il problema della determinazione di una scala per le masse, può anche esso trovare soluzione nell'ambito della problematica relativa alla rinormalizzazione. Dalla circostanza che la Lagrangiana fondamentale risulti invariante per trasformazioni di scala è errato inferire che non esiste una scala per le masse, in quanto la rinormalizzazione introduce un parametro di massa che viene quindi a fungere da scala.⁵⁸

Accanto a questi problemi restano le difficoltà incontrate nello sviluppo di uno schema perturbativo nel limite di accoppiamento debole, con l'ausilio del quale si possano calcolare sistematicamente le correzioni di ordine superiore anche nel caso di soluzioni non perturbative. Alcuni aspetti non-lineari della teoria sono stati tuttavia indagati con successo per mezzo di un metodo variazionale, che si suppone possa venire applicato in futuro a modelli più complessi e nel contempo più realistici del modello abeliano studiato nel capitolo V.

Infine è da citare anche la possibilità che una rottura dinamica della simmetria possa avvenire senza violazione di una simmetria globale,⁴⁹ come nel caso dell'elettrodinamica di Schwinger in due dimensioni. In questo caso verrebbero evasi i presupposti del teorema di

Goldstone e non vi sarebbero eccitazioni a massa zero. Questa situazione si può verificare se, per esempio, la funzione di vertice Γ^μ ha un polo nella sua parte trasversa $(g^{\mu\nu} - \kappa^\mu \kappa^\nu / \kappa^2) \tilde{F}_\nu(\kappa, p)$. In questo caso si avrebbe, per la equazione di Dyson, un analogo polo nel tensore di polarizzazione vettoriale. Il mesone vettore acquisterebbe in questo caso la sua massa senza che nessuna simmetria globale, nè la identità di Ward, vengano violate. Non è chiaro fino ad oggi quale utilità possa presentare per la fisica una generazione delle masse senza violazione della simmetria.

Sono anche state avanzate alcune ipotesi riguardo alla interpretazione dei bosoni di gauge come possibili bosoni di Nambu-Goldstone⁶¹. Adler e al. hanno esaminato in concreto la possibilità che il gravitone possa rappresentare uno stato legato di due fotoni⁶⁰. Questa circostanza potrebbe, secondo gli autori, spiegare le difficoltà incontrate nella rinormalizzazione della teoria quantistica della gravitazione.

Da quello che è stato detto appare quindi come un meccanismo di rottura dinamica della simmetria in teoria di campo relativistica richieda ancora una più approfondita analisi, per rimuovere da un lato le molteplici ambiguità matematiche ancora presenti e fornire d'altro canto dei modelli più realistici per potersi confrontare in maniera più diretta con la fisica delle particelle elementari.

BIBLIOGRAFIA SULLE D.B.S.

- 1 B.W. Lee, J. Zinn-Justin - Phys.Rev. D5 (1972), 3121; 3137, 3155; D7 (1973), 1049 - (Rinormalizzazione delle teorie di gauge spontaneamente rotte)
- 2 G. t'Hooft, M.T.Veltman - Nucl.Phys. B44, 189 (1972)
- 3 G. Cicuta, E.Montaldi - Lett. Nuovo Cim. 4, 329 (1972) (Regolarizzazione dimensionale)
- 4 S. Weinberg - Phys.Rev.Lett. 19, 1264 (1967) - (Il modello di Weinberg-Salam)
- 5 J. Goldstone - Nuovo Cim. 19, 154 (1960) - (Sul modello di Goldstone)
- 6 J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg - Phys.Rev., 127, 965 (1962) (Dimostrazioni della congettura di Goldstone)
- 7 P.W. Higgs - Phys.Lett. 12, 132 (1964); Phys.Rev.Lett. 13, 508 (1964); Phys.Rev. 145, 1156 (1966) - (Il meccanismo di Higgs con campi scalari)
- 8 F. Englert, R.Brout - Phys.Rev.Lett. 13, (1964) 321 - (Il meccanismo di Higgs dinamico)
- 9 F. Englert, R.Brout, M.F. Thiry - Nuovo Cim. 43A, 2836 (1966) (Il meccanismo di Higgs dinamico con gruppi di Lie compatti in generale)
- 10 J. Bardèen, L.N. Cooper, J.R.Schrieffer - Phys.Rev. 108 (1957) 1175 - (La teoria BCS della superconduttività)
- 11 R. Feynman - The Feynman Lectures in Physics, vol.III, cap
- 12 N.N. Bogoliubov, V.V. Tolmachev, S.V. Tiablicov - Sov.Phys. JETP 34 (1958) 41, 46, 51 - (Trasformazioni canoniche e quasi-particelle in teoria della superconduttività)
- 13 P.W. Anderson - Phys.Rev. 110 (1958) 827 - (Invarianza di gauge ed effetto Meissner in teoria della superconduttività)
- 14 Y. Nambu - Phys.Rev. 117 (1960) 648 (e pag.3) - (Quasiparticelle e invarianza di gauge in teoria della superconduttività)
- 15 A. Fetter, J.D. Walecka - Quantum Theory of Many Particle Systems (McGraw Hill 197) cap. 10, par.37 e cap. 13
- 16 L.P. Gorkov - Sov.Phys. JETP 9, 1364 (1959) - (Derivazione della teoria fenomenologica della superconduttività)

- 17 Y. Nambu - Phys.Rev.Lett. 4, 380 (1960) - (Sulla conservazione della corrente assiale in presenza di fermioni massicci)
- 18 Y. Nambu, G. Jona-Lasinio - Phys.Rev. 122, 345 (1961)
(Il modello di Nambu - Jona-Lasinio)
- 19 R.A. Ross, M.T. Veltman - Nucl.Phys. 95B (1975) 136
(Parametri arbitrari in teorie di Higgs convenzionali)
- 20 J. Schwinger - Phys.Rev. 128 (1962) 2325; Phys.Rev. 125
(1962) 397 - (QED in 2 dimensioni, Meccanismo di Schwinger)
- 21 Y. Freundlich, D. Lurié - Nucl.Phys. B19, 557 (1970)
(Estensione locale del modello di Nambu)
- 22 D.J. Gross, A. Neveu - Phys.Rev. D10 (1974) 3235
(Applicazioni dei meccanismi di DSB alle interazioni forti)
- 23 R. Jackiw, K. Johnson - Phys.Rev. D8 (1973) 2386
(Rottura dinamica della simmetria in una teoria di gauge abeliana con una corrente assiale conservata)
- 24 J. Cornwall, R. Norton - Phys.Rev. D8 (1973) 3338
(Rottura dinamica della simmetria di gauge abeliane in un modello $SO(2) \times SO(2)$)
- 25 F. Englert, R. Brout - Phys.Lett. 49B, 77 (1974) - (Introduzione di 2 coppie di leptoni, applicazione alle interazioni deboli ed e.m.)
- 26 E.S. Eichten, F.I. Feinberg - Phys.Rev. D10, 3254 (1974)
(Teorie di Yang-Mills pure e non, DSB di tipo A)
- 27 F. Englert, J.M. Frère, P. Nicoletopoulos - Phys.Lett. 52B (1974) 443
- 28 F. Englert, J.M. Frère, P. Nicoletopoulos - Phys.Lett. 59B (1975) 246
(Confronto tra generazione ultravioletta e generazione infrarossa della massa, DSB di tipo B)
- 29 F. Englert, J.M. Frère, P. Nicoletopoulos - Nucl.Phys. B95, 265
(1975) - (Teorie di Yang-Mills pure, DSB di tipo B)
- 30 F. Englert, J.M. Frère, P. Nicoletopoulos - Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Stanford 1975
(Rinormalizzazione delle teorie con DSB)
- 31 F. Englert - Cargèse Lecture Notes (1975)
(Rinormalizzazione)
- 32 M. Baker, K. Johnson - Phys.Rev. D3 2516 e 2541 (1971)
(Elettrodinamica JWBA, anomalie in soluzioni non perturbative)

- 33 K. Johnson, M. Baker, R. Willey - Phys.Rev. 136 (1964) B1111 ;
163 (1967), 1699
K. Johnson, M. Baker - Phys.Rev. 183 (1969) 1292; D8 (1973) 1110
(Elettrodinamica JWBA)
- 34 S.L. Adler - Phys.Rev. D5 (1972) 3021
(Sulla forma di $\Sigma(\not{p})$ per $p^2 \rightarrow \infty$)
- 35 K. Johnson - (In 9th Latin Am. School of Phys., Santiago Chili,
1967 edited by I Saavedra (Benjamin N.Y. 1968)
(Anomalie in soluzioni non perturbative)
- 36 H. Pagels - Phys.Rev.Lett. 28, 1482 (1972) ;
Phys.Rev. D7, 3689 (1973) - (Applicazione della rottura
dinamica della simmetria chirale alle interazioni forti;
anomalie in soluzioni non perturbative)
- 37 S. Adler - Phys.Rev. 177 (1969) 2426 - (Anomalie ABJ)
- 38 H. Georgi, S.L. Glashow - Phys.Rev. D6 (1972) 429
(Condizioni per l'assenza del grafico triangolare in teorie
di gauge non abeliane)
- 39 J. Gross, R. Jackiw - Phys.Rev. D6 (1972) 477
(Sulla eliminazione delle anomalie della corrente assiale)
- 40 C. Bouchiat, J. Iliopoulos, Ph. Meyer - Phys.Lett. 38B (1972) 519
(Eliminazione delle anomalie)
- 41 A. Maris, V. Herzkovitz, G. Jecop - Phys.Rev.Lett. 12 (1964) 1568
(Anomalie in soluzioni non perturbative)
- 42 M. Baker, K. Johnson, B.W. Lee - Phys.Rev. 133 (1964) B209
(Identità di Ward ed equazione di Bethe Salpeter)
- 43 G. Jona-Lasinio - Nuovo Cim. 34, (1964) 1990
(Favoribilità energetica in modelli di Goldstone)
- 44 J. Luttinger-Ward - Phys.Rev. 118 (1960) 4417
(Favoribilità energetica in Many Body)
- 45 C. de Dominicis, P.C. Martin - J.Math.Phys. 5, (1964) 14;
5, (1964) 31
(Favoribilità energetica in teoria non relativistica)
- 46 S. Coleman, E. Weinberg - Phys.Rev. D7 (1973) 1688
(Funzione di potenziale per teorie di Higgs, favoribilità
energetica in teorie di Higgs)
- 47 E. Abers, B.W. Lee - "Gauge Theories" in Physics Reports
(Articolo di rassegna sulle teorie di gauge)
- 48 S. Coleman - Erice Lectures 1973 - (Lezioni sulle teorie di gauge)

- 49 R. Jackiw - in "Theories and Experiments in High Energy Physics", ed. Perlmutter e Widmayer, Plenum Press 1975
(Approssimazioni quantomeccaniche in teoria relativistica di campo)
- 50 O. Nakanishi - Progr.Theor. Phys. Suppl. 43 (1969) 1
(Nuclei di Fredholm in teorie con DBS)
- 51 R. Jackiw - Phys.Rev. D9 (1974) 1686
(Sviluppo perturbativo per l'azione efficace)
- 52 J.M. Cornwall, R. Jackiw, E. Tomboulis - Phys.Rev. D10 (1974) 2428
(Azione efficace per operatori composti)
- 53 R. Jackiw, E. Tomboulis, S. Tye - Phys.Rev. D11 (1975) 2839
(Libertà asintotica in teorie di gauge dinamicamente rotte)
- 54 H.D. Politzer - Phys.Rev.Lett., 30 (1973) 1346
(Libertà asintotica in teorie di gauge non abeliane)
- 55 D.S. Gross, F.Wilczek - Phys.Rev.Lett. 30 (1973) 1343
- 56 J.M. Cornwall - Phys.Rev. D10 (1974) 500
(Introduzione di una Lagrangiana nonlocale nonpolinomiale
Studio delle DBS con l'ausilio del gruppo di rinormalizzazione)
- 57 V. Gusynin-Miransky - Nucl.Phys.B. vol. 109 (1976) 526
(Analisi delle DBS con le equazioni del gruppo di rinormalizzazione)
- 58 R. Stern - Phys.Rev., D14 (1976) 2081
(Analisi delle DBS con l'ausilio del gruppo di rinormalizzazione)
- 59 S. Weinberg - Recent Progress... , Rev.Of Mod.Phys. 1973 e
Aix en Provence 1974
(Rilevanza fenomenologica delle teorie con DSB)
- 60 S.L. Adler, J.Liebermann, Y.J.Ng, H.S.Tsao - Phys.Rev. J. 1976
(Gravitoni come stati legati fotonici)
- 61 Y.M. Cho, P.G.O. Freund - Phys.Rev. D12 (1975) 1711
(Campi di gauge non abeliani come campi di Nambu-Goldstone)

Bibliografia recente:

J.M. Cornwall R.C. Shellard

*UCLA prep. 77/TEP/22
Nov. 1977*

UCSB prep. # 2245 (Apr. 14)

Errata

p. 70 bis : $D_{\mu\nu}^A = -i \left(\right) \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}$

p. 39 : aggiungere i^+ nella fig. 10.

p. 126 : $\hat{a}_- = 0$ e $\hat{b}_+ = 0$

p. 39 : Γ ; aggiungere i^+

p. 48 : $(\leftarrow) (\rightarrow)$

p. 125 : $v_2 = \pm \sqrt{-\mu^2/\lambda}$

p. 117 : $\Gamma[\phi]$

p. 25 : (buca)

